Научно-популярный физико-математический

Квант

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР

2
1970

Заведующая редакцией *Л. И. Князева.*
Художественный редактор *И. П. Леонов.*
Технический редактор *В. С. Никифорова.*
Корректоры *И. Б. Мамулова*
и Г. С. Смоликова

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы

Сдано в набор 16/XII-69 г. Подп. к печ. 6/III-70 г.
Бумага 70×100$^1/_{16}$ Физ. печ. л. 4. Усл. печ. л. 5,2.
Уч.-изд. л. 5,4 Тираж 205 500 экз. Т-00213
Цена 30 коп. Заказ 2520.

Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов, Московской области

Научно-популярный физико-математический

2

Квант

журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

В НОМЕРЕ:

Москва

Редакции журнала «Квант»

Во время XI Международной математической олимпиады я узнал, что в скором будущем в Москве начнет выходить Ваш журнал. Наша «Альфа» еще очень молода, ей едва минуло три года. Но свой свояка видит издалека. Поэтому мы желаем Вам успешного начала и будем рады настоящему и тесному сотрудничеству.

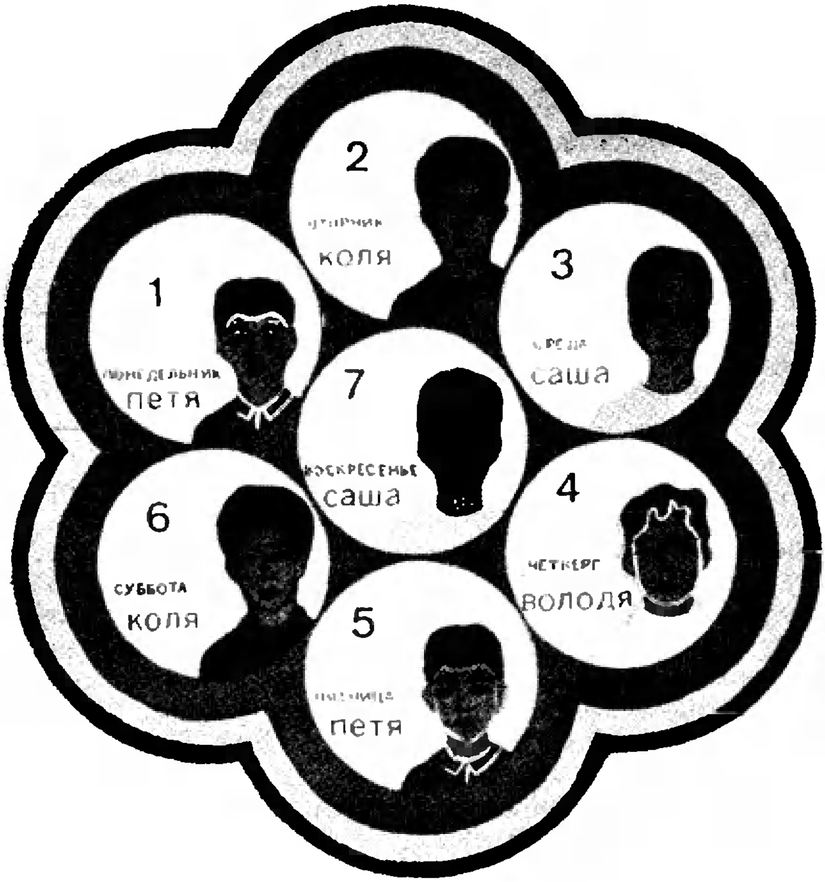
От имени наших читателей я Вас сердечно приветствую.

Главный редактор журнала «Альфа»

И. ЛЕМАН,

преподаватель высшей школы, заслуженный учитель школы

«Альфа» — математический журнал для учащихся средних школ ГДР, издающийся с января 1967 года. Он рассчитан на учеников 5—12 классов. Ребята разных возрастов находят в нем интересный для себя материал. Журнал уделяет большое внимание как национальным олимпиадам ГДР, так и международным математическим олимпиадам: печатает олимпиадные задачи, их решения, знакомит читателей с победителями. Традицией журнала стали выступления на его страницах немецких победителей международных олимпиад, в которых они рассказывают о себе, о занятиях математикой, о планах на будущее. Журнал из номера в номер помещает научно-популярные статьи на различные темы, такие, например, как основы теории множеств, операции над множествами, доказательство методом математической индукции и др. Кроме теории, статьи содержат также примеры ее приложения к решению математических задач. Следует отметить, что все статьи написаны доступно, интересно и таким языком, что их могут читать не только ученики старших классов, но и более юные читатели. Журнал рассказывает о математической жизни в разных странах, коротко сообщает о конференциях и конгрессах, посвященных школьной математике.



ЧТО ТАКОЕ ГРАФИК ФУНКЦИИ

А. Н. КОЛМОГОРОВ

Здесь продолжается изложение новой, более общей точки зрения на хорошо известные из школы понятия — функция и ее график. Начало этого изложения было в статье «Что такое функция», помещенной в первом номере «Кванта». Для понимания настоящей статьи необходимо владеть понятиями, которые определены в первой статье

1. НАПОМИНАНИЕ И НЕБОЛЬШИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

В первом номере журнала по статье «Что такое функция» вы познакомились с современным общим пониманием слова функция: функция — это совершенно произвольное отображение некоторого множества E на другое множество M. Множество E называется *областью определения* функции, а множество M — *множеством ее значений*. Чтобы задать функцию с областью определения E, надо указать для каждого элемента x этого множества вполне определенный объект *)

$$y=f(x).$$

Каким бы способом мы это ни сделали, мы получим функцию с областью определения E. Если множество E состоит из учеников вашего класса ,то можно, например, для любого ученика x принять за $y=f(x)$ вторую букву его имени (предполагая, что в классе нет учеников, имя которых состоит из одной-единственной буквы, — хотя я и знал девочку Олю, которую звали просто «О»).

При таком задании функции само собой определится множество ее значений M; это множество всех тех объектов y, для которых существует хоть один элемент x множества E, для которого

$$f(x)=y.$$

Поэтому, описывая смысл термина функция, можно и не говорить в описании явно о множестве значений. Правильно будет, например, просто сказать, что «функция есть закон, по которому каждому элементу x некоторого множества E поставлен в соответствие вполне определенный объект $y=f(x)$». Мы подчеркивали, впрочем, что все эти описания лучше не считать определениями. Если бы мы захотели в самом деле определить понятие функции через понятие «закона», то с нас потребовали бы точное определение смысла термина «закон» и т. д. Понятие функции будем считать одним из основных понятий математики, смысл которого только поясняется, а не дается формальным определением.

В школе вы привыкли иметь дело только с числовыми функциями, область определения которых состоит из чисел и значения которых являются числами. Смысл выражения «числовая функция числового аргумента» не вполне определен. Ведь само понятие числа в школе постепенно обобщается. Мы остановимся на системе всех действительных чисел, с которой школьники знакомятся в девятом классе. Действительные функции действительного аргумента и изучаются по преимуществу в старших классах средней школы. Их графики вы умеете вычерчивать на «числовой плоскости».

В школьных учебниках пишут, что «числовая плоскость» — это такая плоскость, на которой некоторым определенным образом введены координаты. Если верить учебникам буквально, то числовых плоскостей очень много. Проводя на классной доске оси координат, учитель превращает в «числовую плоскость» плоскость этой доски; ученики на страницах своих тетрадок изготовляют все новые и новые «числовые плоскости», иногда по нескольку на одной странице!

В п. 3 этой статьи вы узнаете, с какой числовой плоскостью в действительности имеют дело математики. Но сначала мне хочется сделать одно дополнительное замечание к изложению статьи «Что такое функция».

В школьном курсе алгебры чаще всего имеют дело с функциями, заданными «аналитически» при помощи формулы. Областью определения такой функции, если не сказано ничего другого, считается множество всех тех значений аргумента, для которых все предписанные формулой операции над числами выполнимы. Будем, например, как это принято в школе, счи-

---

*) Из первой статьи вы знаете, что значения функции могут быть не только числами, но и днями недели, мальчиками или девочками, вообще любыми предметами, или, как принято говорить, «объектами».

тать знак $\sqrt{\ }$ знаком «арифметического» квадратного корня. Ясно, что формула

$$y=f(x)=(\sqrt{x})^2 \qquad (1)$$

позволяет вычислить по заданному x соответствующее ему значение y лишь при неотрицательном x (иначе квадратный корень «не извлекается»).

При неотрицательном x

$$y=f(x)=x. \qquad (2)$$

Формула (2) проще, чем формула (1), и хотелось бы ее считать формулой, определяющей нашу функцию. Но область определения функции, заданной формулой (2), состоит не из одних неотрицательных чисел x, а из **всех** чисел x. Если мы хотим дать новое определение **той самой** функции, которая определена формулой (1), надо написать

$$y=f(x)=\begin{cases} x \text{ при } x\geqslant 0, \\ \text{не определена при } x<0. \end{cases} \qquad (3)$$

Подобным же образом функцию $g(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ можно записать так:

$$g(x)=\begin{cases} x^2+x+1 \text{ при } x\neq 1, \\ \text{не определена при } x=1. \end{cases} \qquad (4)$$

На школьных и вузовских экзаменах требуют полной точности в подобных вопросах.

2. ГРАФИК ФУНКЦИИ

Рассмотрим следующий график дежурств (см. № 1 «Кванта», стр. 29):

	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Петя							
Коля							
Саша							
Володя							

Мы уже знаем, что это график функции: имя дежурного можно считать функцией дня недели. Так как дней недели семь, а мальчиков четыре, то мы нарисовали

$$7\times 4=28$$

клеточек, но закрасили красным только семь из этих клеточек. Если бы мальчики решили расположить свои имена по алфавиту, то получилась бы табличка, приведенная на стр. 6. Выглядит она по-другому, но изображает то же самое распределение дежурств — ту же самую функцию.

В обеих табличках 28 клеточек соответствуют 28 возможным п а р а м

(день недели, мальчик).

Из этих 28 пар выделены с е м ь пар

(пн, Петя), (вт, Коля), (ср, Саша), (чт, Володя),
(пт, Петя), (сб, Коля), (вс, Саша),

т. е. все пары, в которых день недели соединен с дежурным на этот день:

(день недели, дежурный на этот день),

или абстрактно: пары вида

$$(x, f(x)).$$

Только выбор этих пар и существен для задания функции.

После этого примера вам, быть может, не покажется неожиданным такое о п р е д е л е н и е:

Графиком функции f называется множество всех таких пар)*

$$(x, y),$$

что: 1) первый элемент пары x принадлежит области определения функции, 2) второй элемент пары

$$y = f(x).$$

	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Володя				■			
Коля		■				■	
Петя	■				■		
Саша			■				■

В нашем примере график функции f:

$\Gamma_f =$ {(пн, Петя), (вт, Коля), (ср, Саша), (чт, Володя), (пт, Петя), (сб, Коля), (вс, Саша)}.

Для функций, заданных таблицей

x	f_1	f_2	f_3	f_4
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A

*) Всюду в этой статье имеются в виду «упорядоченные пары». Пара (1,2) отличается от пары (2,1). Первый и второй элементы пары могут и совпадать: (1,1) или (2,2) — тоже пары.

в соответствии с данным определением получим графики

$$\Gamma_1 = \{(A, A), (B, A)\}, \quad \Gamma_2 = \{(A, B), (B, B)\},$$
$$\Gamma_3 = \{(A, A), (B, B)\}, \quad \Gamma_4 = \{(A, B), (B, A)\}.$$

Ясно, что для функций с конечной областью определения число элементов графика (т. е. число входящих в график пар) равно числу элементов области определения функции. Для функций с бесконечной областью определения все пары

$$(x, f(x))$$

выписать нельзя. Приходится описывать эти пары при помощи их свойств.

Например, для функции

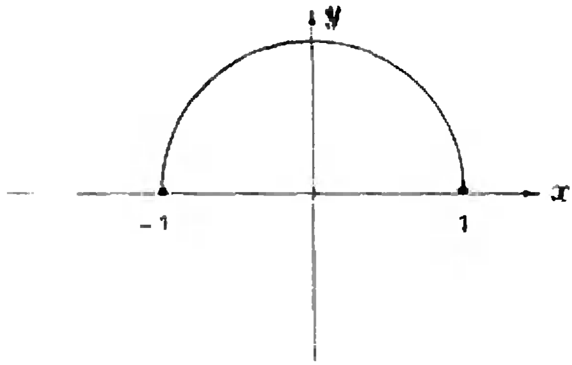
$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

график состоит из всевозможных пар чисел вида

$$(x, \sqrt{1 - x^2}),$$

т. е. из всех пар (x, y), для которых выполнены два условия

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ и } y \geq 0.$$



Это определение графика функции можно записать в виде

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, \ y \geq 0\}.$$

Само общее определение графика функции f можно записать в виде такой формулы *):

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}.$$

Определив график функции как множество пар, каждая из которых состоит из значения аргумента и значения функции, соответствующего этому значению аргумента, мы освободили понятие графика от всего случайного. В этом абстрактном понимании у каждой функции имеется один-единственный график.

3. ЧИСЛОВАЯ ПЛОСКОСТЬ

Обратимся к наиболее обычным в школе действительным функциям действительного переменного. В школе вы привыкли к тому, что графиком такой функции f называется множество тех точек $P(x, y)$ числовой плоскости, координаты которых x и y удовлетворяют равенству

$$y = f(x).$$

Эта формулировка и общее определение графика, данное выше, в п. 2, похожи, но слегка отличаются. В п. 2 говорится о множестве п а р (x, y), а в обычном школьном определении — о множестве т о ч е к P с координатами x и y. Но нет ли возможности привести эти две формулировки к полному согласию?

---

*) Мы пользуемся стандартным обозначением, принятым в теории множеств.

$$\{x \mid A(x)\}$$

обозначает множество всех объектов x, удовлетворяющих условию $A(x)$. Например, $\{x \mid x^2 = 1\}$ — множество всех x, для которых $x^2 = 1$, т. е. множество из двух чисел: $\{1, -1\}$.

Оказывается, это очень просто. Это простое решение и получило всеобщее распространение в современной научной литературе. П о о п р е д е л е н и ю считают, что *числовая плоскость есть множество всех пар действительных чисел*. Числовую плоскость обозначают R^2. Ее определение можно символически записать

$$R^2 = \{x,\ y \mid x \in R,\ y \in R\}.$$

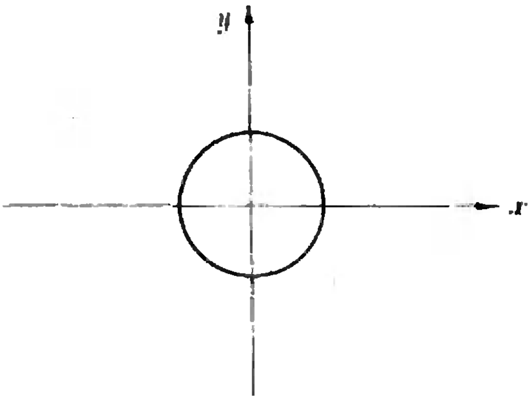
Немного подумав, вы сами убедитесь в том, что при таком определении числовой плоскости обычное школьное определение графика действительной функции действительного переменного становится частным случаем общего определения, данного в п. 2.

Обозначение $P(x, y)$ для точки с координатами x и y делается теперь излишним. *Точками числовой плоскости* в новом понимании являются просто сами *пары чисел* (x, y). Можно говорить просто о «точке (0, 0)» (начало координат), о точках (1, 2), (—2, —1) и т. д.

Не лишне заметить, что и термину «числовая прямая» надо теперь придать новый смысл: *числовая прямая* это просто само *множество действительных чисел* R. Естественно, что *точками числовой прямой* при этом надо считать просто сами *действительные числа*. Обычно в школьных учебниках этого не говорят прямо, но часто употребляют в применении к числам геометрический язык: множество чисел

$$[a,\ b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

называют «отрезком», говорят, что «точка» 2 принадлежит «отрезку» [1, 3] и т. п.



Любое множество точек числовой плоскости будем называть расположенной на числовой плоскости *геометрической фигурой*. Такова, например, окружность с центром (0, 0) и радиусом единица: это множество точек, т. е. пар чисел (x, y), для которых

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Естественно, что точки и геометрические фигуры числовой плоскости можно наглядно изображать на чертеже. Для этого на реальной плоскости (листе бумаги или классной доске) выбирают оси координат и точку числовой плоскости (x, y) изображают реальной точкой с координатами x и y. Конечно, такое изображение может быть только приближенным. Начерченные на бумаге или классной доске графики являются лишь приближенными изображениями «настоящих» графиков функций, которые в нашем новом понимании суть просто подмножества числовой плоскости. К этим «настоящим» графикам и относится утверждение, что функция полностью определяется своим графиком.

Пусть задано множество пар

$$M = \{(x,\ y)\}.$$

Таким множеством, например, является любая «фигура» на числовой плоскости. Что надо дополнительно потребовать, чтобы это множество пар было графиком некоторой функции?

Ответ не сложен: для этого необходимо и достаточно, чтобы в множестве M нельзя было найти две пары (x, y_1) и (x, y_2) с общим первым элементом x и различными вторыми элементами $y_1 \neq y_2$. (Проведите доказательство сами.) На рис. 1 красная кривая есть график функции, а черная графиком не является.

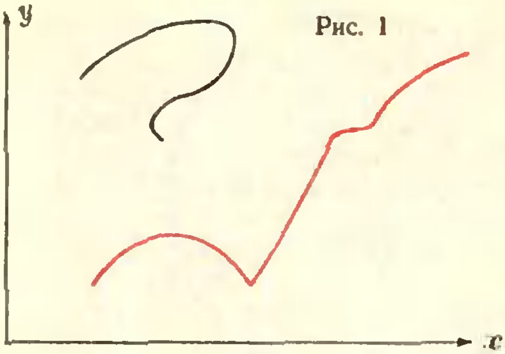


Рис. 1

Множество пар (x, y), в котором не существует двух пар вида (x, y_1), (x, y_2), $y_1 \neq y_2$, можно назвать *функциональным графиком*. Заметьте, что мы сейчас определили «функциональный график», не пользуясь понятием «функции». Нельзя ли с этой стороны дать формальное определение и самого понятия функции, которое мы считали основным, т. е. не подлежащим формальному определению? Я не хочу давать ответ на этот вопрос здесь. Он не совсем прост. В нашем журнале мы еще будем иметь повод вернуться как к современным представлениям о понятии функции, так и к его истории.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Чтобы освоиться с широтой общего понимания термина «функция», рассмотрим еще некоторые простейшие геометрические преобразования.

Чтобы повернуть плоскую фигуру вокруг точки O (рис. 2), можно перенести контуры фигуры на наложенную на плоскость чертежа кальку, закрепить кальку булавкой в точке O и, повернув кальку, перенести контуры копии фигуры с кальки на плоскость чертежа (например, при помощи копировальной бумаги). При повороте все точки фигуры поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении на один и тот же угол.

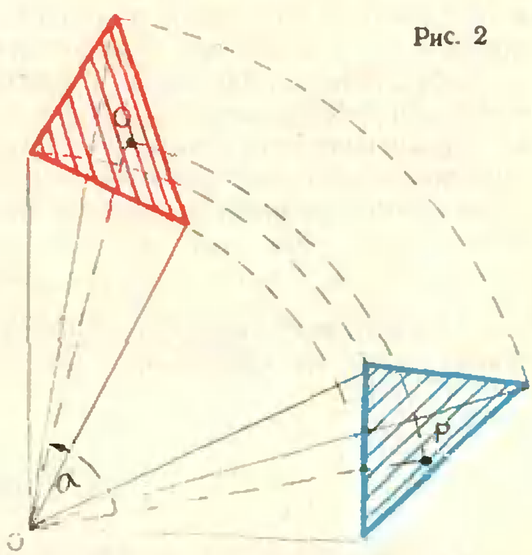


Рис. 2

Обозначим

$$Q = R_O^{\alpha}(P) \qquad (1)$$

положение точки P после поворота на угол α против часовой стрелки. Если точка O и угол α заданы, то каждой точке P по формуле (1) соответствует вполне определенная точка Q. Ясно, что в смысле нашего общего определения R_O^{α} есть функция. Ее областью определения является множество всех точек плоскости P.

Углы поворота указывают со знаком. На рис. 3 точка Q_2 получается из точки P поворотом на 120°, а точка Q_1 — поворотом на —120° (или поворотом на 240°). Если точка Q получена из точки P поворотом на α градусов, то точку P можно получить, повернув Q на $-\alpha$ градусов: если

$$Q = R_O^{\alpha}(P),$$

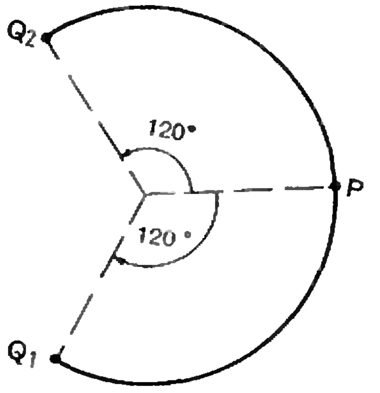


Рис. 3

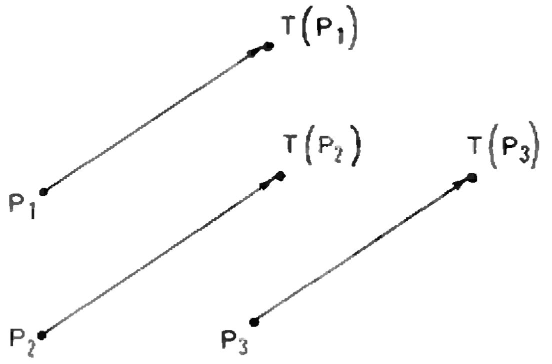


Рис. 4

то

$$P = R^{-\alpha}{}_O(Q).$$

Мы видим, что поворот R_O^α всегда является *обратимой* функцией.

В применении к поворотам чаще говорят об «*отображениях*». *Отображение, обратное к повороту R_O^α, есть поворот $R_O^{-\alpha}$.* Символически можно написать:

$$R_O^{-\alpha}(R_O^\alpha(P)) = P,$$
$$(R_O^\alpha)^{-1} = R_O^{-\alpha}.$$

Поворот отображает множество точек плоскости на самого себя. Если считать, что плоскость есть не что иное, как множество своих точек (так и поступают в современном изложении геометрии), то можно сказать, что *поворот есть обратимое отображение плоскости на себя.*

Обратимые отображения плоскости на себя и называются *геометрическими преобразованиями плоскости.* С геометрическими преобразованиями вы еще неоднократно встретитесь на страницах нашего журнала. Пока же приведем еще только один пример геометрического преобразования плоскости. *Параллельным переносом называется отображение плоскости на себя*

$$P \to Q = T(P),$$

при котором все точки P перемещаются на одно и то же расстояние и в одном и том же направлении (рис. 4).

5. ВЕКТОРЫ

Хотя возможно, что вы уже устали от знакомства с новыми понятиями и необычным толкованием понятий вам уже известных, сделаем еще одно усилие. Постараемся понять, что такое г р а ф и к параллельного переноса $P \to Q = T(P)$. По общему определению это — множество всех таких пар точек

$$(A, B),$$

для которых

$$B = T(A).$$

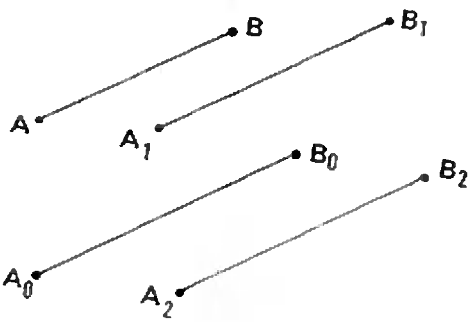


Рис. 5

Выберем одну такую пару точек (A_0, B_0). Чем характеризуются остальные? Тем, что отрезки AB равны по длине и одинаково направлены с отрезком A_0B_0 (рис. 5). График параллельного переноса T есть по определению множество всех таких пар точек (A, B).

Обычно считают, что любая пара точек (A, B) определяет «связанный «вектор»$\overrightarrow{AB}$, связанные же векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ определяют один и тот же свободный вектор», если отрезки AB и $A'B'$ равны по длине и имеют общее направление.

Проще сказать, что «связанный вектор» это просто сама пара точек (A, B), а «свободный вектор» $\overrightarrow{AB}$ — это множество всех связанных векторов (A', B'), равных (A, B) по длине и направлению. А при общем определении графика это множество есть не что иное, как график параллельного переноса T, который определяется тем, что

$$T(A) = B.$$

Если

$$T(A_1) = B_1, \quad T(A_2) = B_2, \quad T(A_3) = B_3, \quad \ldots,$$

то пишут

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_3B_3} = \ldots = a,$$
$$T = T_{\overrightarrow{A_1B_1}} = T_{\overrightarrow{A_2B_2}} = T_{\overrightarrow{A_3B_3}} = \ldots = a.$$

Логика образования общих понятий нас привела к несколько необычному утверждению: *свободный вектор* $\boldsymbol{a}$ *есть не что иное, как график соответствующего параллельного переноса* $T_{\boldsymbol{a}}$ *на вектор* $\boldsymbol{a}$. Будет хорошо, если вы полностью разберетесь в том, что этот вывод является неизбежным следствием принятых нами определений графика, свободного вектора (как множества равных по длине и направлению связанных векторов) и связанного вектора (как пары точек). Замечу, впрочем, что такие определения связанного вектора и свободного вектора не вполне общеприняты, хотя и представляются автору этой статьи самыми удобными.

ЗАДАЧИ

1. Напоминание и небольшие дополнения

1. Какова область определения функций

$$1)\ f_1(x) = \frac{x}{x - |x|}, \quad 2)\ f_2(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x^2}}, \quad 3)\ f_3(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}\ ?$$

2. Какое условие надо добавить к формуле

$$f(x) = x^2 + 1,$$

чтобы она определила функцию f_3 из задачи 1?

3. Какое дополнительное условие надо добавить к формуле

$$f(x) = 1,$$

чтобы получилось определение функции

$$f_4(x) = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2?$$

Замечание. В задачах 1—3 под знаком $\sqrt{}$ понимается «арифметический» квадратный корень, т. е. неотрицательное число.

2. График функции

4. Сколько существует функций с областью определения 1, 2, 3, графики которых являются подмножествами множества пар

$$\{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,3)\}$$

(см. рис. 6)?

Сколько из этих функций имеет обратную?

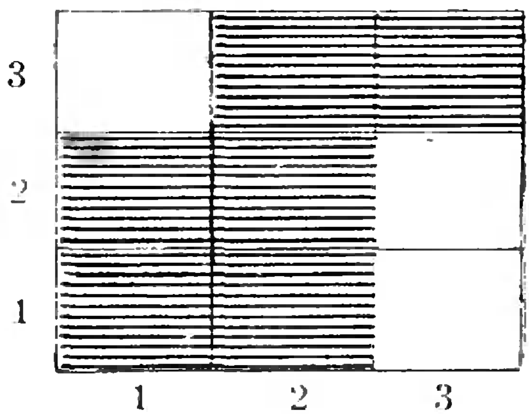


Рис. 6

5. Покажите, что график обратной функции f^{-1} определяется формулой

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(x,\ y) \mid (y,\ x) \in \Gamma_f\}.$$

(Естественно, предполагается, что функция f имеет обратную.)

3. Числовая плоскость

6. Опишите устройство графика функции Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

7 *) Число x из отрезка $[0;\ 1]$ разлагается в бесконечную троичную дробь

$$x = 0{,}x_1x_2x_3 \ldots \quad (x_n = 0,\ 1,\ 2).$$

Значение функции $y = C(x)$ определяется двоичной дробью

$$y = 0{,}y_1y_2y_3 \ldots \quad (y_n = 0,\ 1)$$

следующим образом:

если $x_n = 0$, то $y_n = 0$,

если $x_n = 1$ или $x_n = 2$, то:

$y_n = 1$ при условии, что среди цифр $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ не было единиц,

$y_n = 0$ при условии, что среди цифр $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ уже встречалась одна единица.

Попробуйте начертить график этой функции. Докажите, что он содержит бесконечное число горизонтальных отрезков. Если вы знакомы с понятием непрерывности функции, попробуйте доказать, что наша функция непрерывна.

Замечание. В этой задаче мы не избегаем троичных дробей, в которых все знаки, начиная с некоторого, двойки, и двоичных дробей, в которых все знаки, начиная с некоторого, единицы. Например, мы пишем в троичной системе

$$0{,}2222\ldots = 1;\ 0{,}12222\ldots = 0{,}200000\ldots$$

и в двоичной системе считаем, что

$$0{,}1111111\ldots = 1;\ 0{,}01011111\ldots = 0{,}01100000\ldots$$

---

*) Это — трудная задача (см. § 15 в книжке: С. В. Фомин «Системы счисления», 1968.

4. Геометрические преобразования

8. Опишите в геометрических терминах преобразования числовой плоскости, которые аналитически задаются формулами:

а) $(x, y) \to (-y, x)$,

б) $(x, y) \to (x, -y)$,

в) $(x, y) \to (y, -x)$,

г) $(x, y) \to (-x, y)$,

д) $(x, y) \to (x+1, y)$,

е) $(x, y) \to (x+a, y+a)$.

9. Докажите для поворотов вокруг общего центра O формулу

$$R_O^\alpha [R_O^\beta (P)] = R_O^{\alpha+\beta} (P). \qquad (1)$$

10. Докажите, что при любых центрах O_1 и O_2 преобразование

$$F(P) = R_{O_1}^\alpha [R_{O_2}^{-\alpha} (P)]$$

будет параллельным переносом. На какое расстояние и в каком направлении?

5. Векторы

11. Докажите формулу

$$T_a [T_b (P)] = T_{a+b} (P). \qquad (2)$$

12. Покажите, что преобразование

$$F(P) = T_a [R_O^\alpha (P)]$$

является поворотом на угол α. Вокруг какого центра?

Замечание. Формулы (1) и (2) короче пишут

$$R_O^\alpha R_O^\beta = R_O^{\alpha+\beta},$$

$$T_a T_b = T_{a+b}.$$

Взятие функции от функции во многих отношениях похоже на умножение. Но это уже особая тема, разработка которой не умещается в этой статье. Мы воспользуемся такой короткой записью функции от функции (композиции отображений) в задачах **13** и **14**.

13. Докажите, что всегда

$$T_a T_b = T_b T_a$$

и

$$R_O^\alpha R_O^\beta = R_O^\beta R_O^\alpha$$

при поворотах вокруг общего центра. Покажите на примере, что, вообще говоря,

$$R_{O_1}^\alpha R_{O_2}^\beta \neq R_{O_2}^\beta R_{O_1}^\alpha$$

при поворотах вокруг различных центров O_1, O_2.

14. Выясните полностью вопрос о том, когда все-таки

$$R_{O_1}^\alpha R_{O_2}^\beta = R_{O_2}^\beta R_{O_1}^\alpha.$$

Н. В. КАРЛОВ и А. М. ПРОХОРОВ

ЛАЗЕРЫ

Около двух тысяч двухсот лет назад римские войска взяли греческий город Сиракузы, расположенный в Сицилии. Этот факт был бы, наверное, известен только специалистам по истории становления Римской империи, если бы при взятии Сиракуз не погиб Архимед — один из величайших физиков Земли.

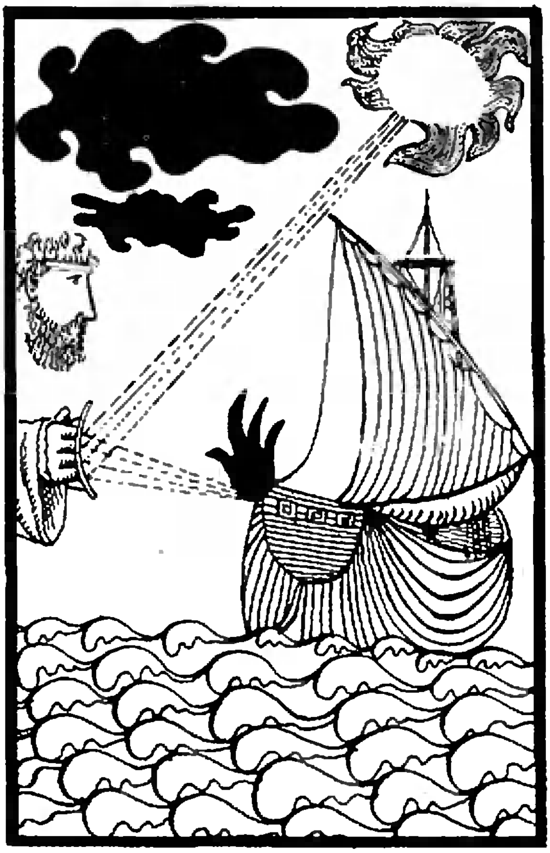
Много легенд связано с личностью Архимеда, его открытиями, с обстоятельствами их появления на свет или их применением. Большая часть этих легенд имеет под собой реальную почву. Но одна, самая красивая, — легенда об уничтожении римского флота сконцентрированным солнечным светом, — к сожалению, — чистая фантастика.

Дело в том, что законы геометрической оптики для обычных источников света говорят о невозможности сконцентрировать световую энергию в виде лучевого шнура и сфокусировать ее на расстоянии, большем, чем размеры фокусирующего прибора. Иное дело лазеры. После возникновения квантовой электроники и создания лазеров *) появилась возможность концентрации мощных световых потоков в виде лучевых шнуров.

Слово лазер является сокращенной записью английской фразы Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, которая переводится так: усиление света путем индуцированного испускания излучения. Попробуем разобраться, что означает эта фраза. Мы знаем, что свет — это электромагнитное излучение, распространяющееся в виде волны и несущее энергию. Световая волна — быстропеременная электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме со скоростью $3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*. Основными характеристиками волнового процесса являются: длина волны — расстояние между двумя гребнями бегущей волны и частота — величина, показывающая, сколько раз в секунду в какой-то фиксированной точке пространства возникает гребень волны. Длина световой волны λ и ее частота ν связаны со скоростью света c простым соотношением $\lambda\nu = c$.

Видимому свету соответствуют волны длиной от 0,4 *мк* до 0,8 *мк* (1 *мк* $= 10^{-4}$ *см*) и частоты от $0{,}75 \cdot 10^{15}$ *гц* до $0{,}375 \cdot 10^{15}$ *гц* (частота 1 *гц* — одно колебание в секунду).

В световой волне периодические изменения в пространстве и во времени испытывают электрическое и магнитное поля, подобно тому как это происходит в радиоволне. Однако обычная световая волна, в отличие от радиоволны, не является монохроматической. О волне говорят как о монохроматической, когда периодическое изменение электрического и магнитного полей волны происходит на одной строго постоянной частоте. В этом случае вся переносимая волной энергия сосредоточена на этой частоте. Такая электромагнитная волна подобна звуковой волне, создаваемой хорошим камертоном.



Частота (длина волны) светового излучения определяет цвет видимого света. Слово «монохроматическое» означает одноцветное. Поэтому если монохроматическая звуковая волна соответствует предельно чистому музыкальному тону, то монохроматическая световая волна соответствует предельно чистому цвету.

Длины волн излучений, исходящих от разных источников, могут, вообще говоря, совпадать. Если при точном совпадении частот гребень одной волны все время совпадает с гребнем другой, то происходит удвоение амплитуды результирующей волны. В этом случае говорят, что волны складываются в фазе. Фазовые соотношения между волнами характеризуют рас-

*) Квантовая электроника ведет свое начало с 1954 года, когда одновременно в СССР и в США были заложены основы этой науки. Первые лазеры появились в 1961 году. Нобелевская премия по физике 1964 года за создание квантовой электроники присуждена Н. Г. Басову, А. М. Прохорову (СССР) и Ч. Таунсу (США). *-Ред.*

положение гребней одной волны по отношению к гребням другой волны. Если это взаимное расположение остается все время неизменным, то волны называются когерентными. Слово «когерентность» буквально означает сцепленность, связность. Понятие когерентности играет большую роль и широко используется в физике.

Обычная световая волна не является монохроматической. Дело в том, что свет, который мы видим, — солнечный свет, свет люминесцентных ламп или ламп накаливания — излучается большим количеством отдельных независимых излучателей (атомов), каждый из которых испускает свет вне какой-либо связи с тем, испускают или не испускают свет его соседи. В результате такого хаотического испускания световые волны, из которых состоит наблюдаемое нами излучение, не когерентны друг другу, а результирующая световая волна не является монохроматической. Именно немонохроматичность и некогерентность обычного света препятствуют концентрации световой энергии в лучевой шнур (отсюда — невозможность построить «гиперболоид инженера Гарина»).

Мы знаем, что свет испускается атомами. Именно атомы являются теми отдельными независимыми излучателями, о которых мы только что говорили. На атомном уровне представление светового излучения в виде непрерывной световой волны несправедливо. Атом может поглощать или излучать свет только в виде определенных порций световой энергии — световых квантов. Величина энергии квантов $\varepsilon = h\nu$, где $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ *дж/гц* — постоянная Планка, а ν — частота света.

Энергия квантов видимого света заключена в пределах от $2{,}5 \cdot 10^{-19}$ *дж* до $5 \cdot 10^{-19}$ *дж*. Хотя эта энергия очень мала, квантовая природа света существенно проявляется во взаимодействии света с веществом. Вместе с тем свет не утратил своей волновой природы, проявляющейся во всех тех явлениях, где важны фазовые соотношения (сложение волн, формирование световых пучков и т. д.). Таким образом, свет обладает совокупностью волновых и корпускулярных, то есть присущих частицам, свойств.

Итак, микроизлучателями света являются атомы, дающие в обычных условиях поток квантов некогерентного излучения. Очевидно, что излучение испускается атомами, обладающими некоторой избыточной энергией, так называемыми возбужденными атомами. Но возбужденный атом неустойчив, он может самопроизвольно без каких-либо внешних причин испустить квант излучения. Акты самопроизвольного испускания происходят случайно. Такое самопроизвольное излучение носит нерегулярный, хаотический характер. Оно некогерентно. Но возможности излучения световой энергии не ограничиваются только самопроизвольными процессами. Необходимо помнить, что внутренняя энергия атомов может принимать только некоторые определенные значения. Как говорят, атом может находиться только на том или ином уровне энергии. Переходы атома с одного уровня на другой сопровождаются изменением его внутренней энергии. При переходе с нижнего уровня энергии на верхний атом поглощает энергию, при переходе с верхнего на нижний атом отдает энергию. Эти переходы, следовательно, сопровождаются либо поглощением, либо излучением света. Частота светового излучения, поглощаемого или излучаемого при переходе с уровня энергии E_1 на уровень E_2, определяется формулой

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}.$$

Кроме самопроизвольных переходов атомов с верхнего уровня энергии на нижний, существует удивительное явление индуцированного излучения, о котором догадался А. Эйнштейн. Процесс индуцированного излучения от самопроизвольного отличается прежде всего тем, что происходит не сам по себе, а под воздействием внешнего по отношению к атому излучения. При этом вторичные кванты неотличимы от первичных. Они точно повторяют частоту и направление распространения первичных квантов. Индуцированное излучение потому и называют индуцированным, что акты его испускания индуцируются (вызываются) внешним по отношению к атому излучением. В результате, в отличие от самопроизвольного излучения многих атомов, индуцированное излучение когерентно.

Таким образом, в оптике имеется явление, пригодное для получения когерентного излучения. Это — индуцированное излучение. Но для одного атома вероятность индуцированного излучения при переходах с верхних уровней энергии на нижние равна вероятности поглощения при переходах с нижних уровней на верхние. Для того чтобы индуцированное излучение превалировало над поглощением, надо на верхних уровнях иметь больше атомов, чем на нижних. А в условиях теплового равновесия дело обстоит как раз наоборот: на нижних уровнях энергии атомов больше, чем на верхних (рис. 1). При взаимодействии излучения с такой системой атомов произойдет следующее. Часть излучения поглотится, и часть атомов перейдет на верхний уровень энергии (рис. 2). Если же система атомов так предварительно подготовлена, что на верхнем уровне энергии атомов больше, чем на нижнем, то при взаимодействии излучения

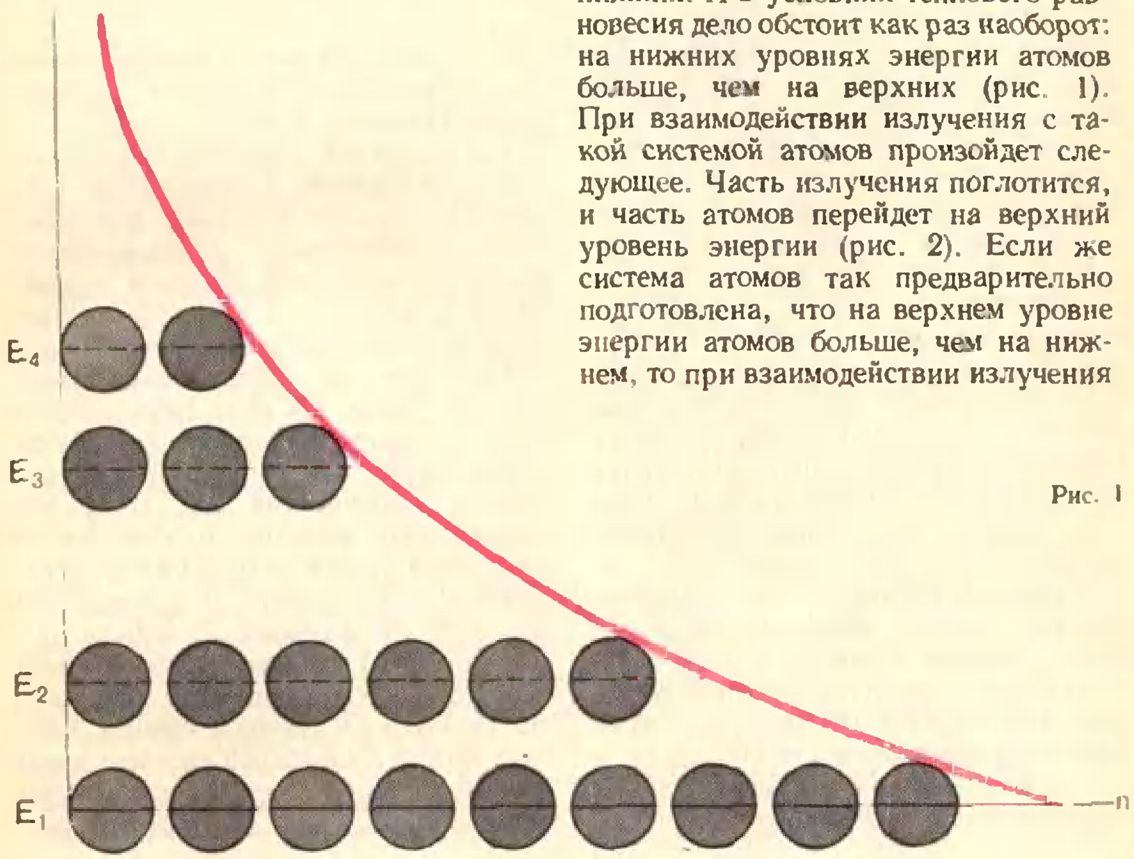


Рис. 1

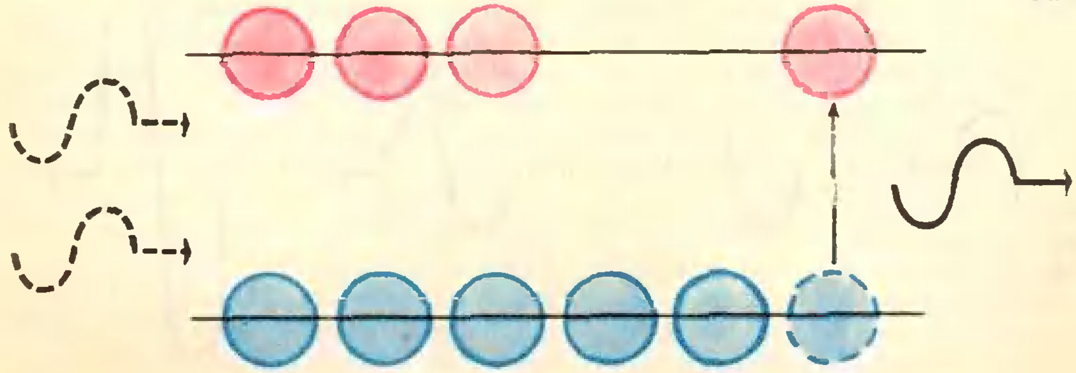


Рис. 2

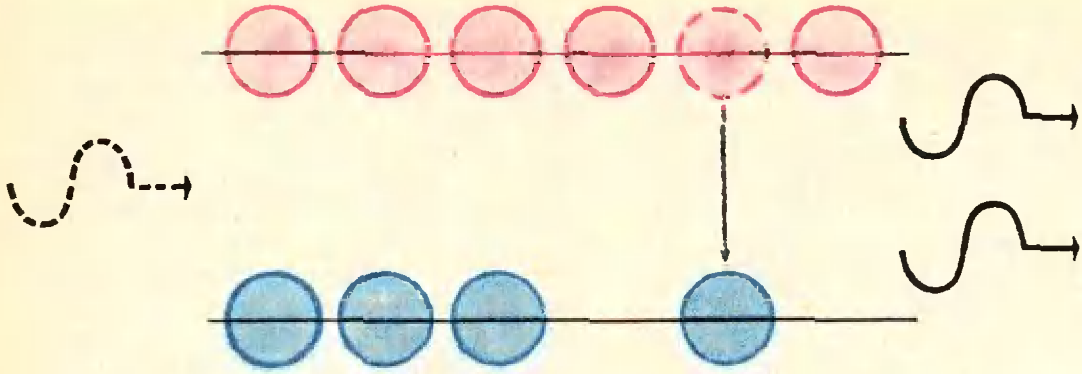


Рис. 3

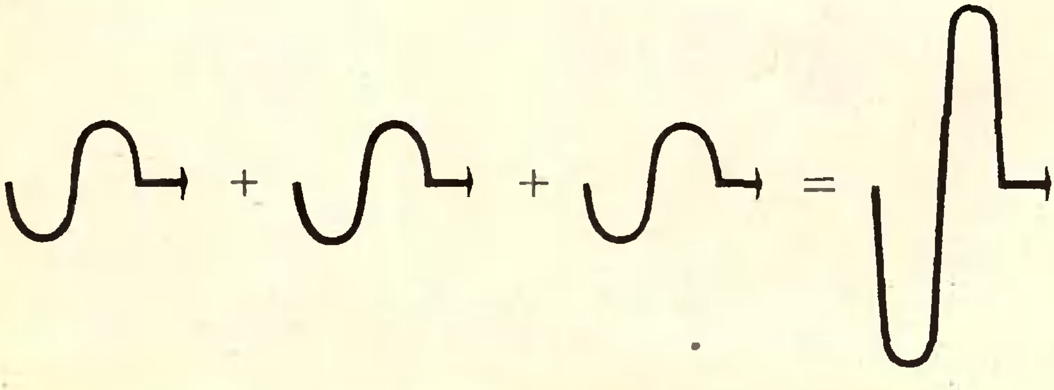
с такой системой атомов в силу эффекта индуцированного испускания произойдет усиление исходного излучения, как это схематически показано на рисунке 3. В силу свойств индуцированного излучения вторичное излучение усиливает первичное, являясь точной его копией. Вместе они составляют одну волну, амплитуда которой нарастает пропорционально числу актов индуцированного испускания (рис. 4). Системы атомов, в которых хотя бы для двух уровней энергии существует такая ситуация, что верхний уровень энергии населен более нижнего, называются системами с инверсией населенностей. Слово инверсия означает перевернутость, изменение нормального порядка вещей на обратный.

Так вот, основой квантовой электроники как науки в целом служит явление индуцированного излучения, и главным в лазерах является использование индуцированного излучения в системах с инверсией населенностей для когерентного усиления и генерации световых волн.

Здесь следует подчеркнуть разницу между усилением и генерацией. Оптический усилитель служит для того, чтобы увеличивать напряженность электрического поля световой волны, поступающей на его вход. На выходе усилителя должна быть получена более интенсивная, но точная копия входного излучения. В этом смысле оптический усилитель полностью подобен своему предшественнику — радио-усилителю. Оптический же генератор должен быть источником оптического излучения, зарождающегося непосредственно в генераторе и выходящего из него во внешнее пространство.

Для работы оптического генератора необходима обратная связь. Она осуществляется следующим образом. Система атомов с инверсией населенностей располагается между двумя строго параллельными друг другу зеркалами.

Рис. 4



В какой-то точке между зеркалами самопроизвольно возникает излучение. Оно распространяется в сторону зеркал и по мере распространения усиливается. Дойдя до зеркал, световые волны отражаются и поворачивают назад. Если гребни отраженных волн совпадают с гребнями падающих волн, то волны усиливают друг друга. Для этого расстояние между зеркалами должно быть кратно целому числу полуволн. Обычно между зеркалами укладываются сотни тысяч полуволн. Излученная энергия накапливается в пространстве между зеркалами и воздействует на систему атомов, вызывая индуцированное излучение. Если мощность индуцированного излучения превышает мощность неизбежных потерь на нагрев зеркал, рассеяние, а также на полезное излучение во внешнее пространство, то возникает незатухающая световая волна. В силу свойств индуцированного излучения эта волна в высшей степени монохроматична. Все атомы работают синхронно. Так их заставляет работать обратная связь, осуществляемая излучением, накопленным между зеркалами.

Для применения лазеров очень важно, что при индуцированном излучении вторичные кванты повторяют не только частоту, но и направление распространения первичных квантов. В результате лазерное излучение обладает не только высокой степенью монохроматичности, но и идеальной направленностью. Таким образом, формирование светового шнура происходит автоматически.

Прежде чем перейти к описанию собственно лазеров, завершим изложение основ квантовой электроники следующей грубой аналогией. Представим себе трибуны большого стадиона, заполненные тысячами страстных болельщиков. Перед началом игры болельщики о чем-то говорят, что-то выкрикивают, но каждый независимо друг от друга. Создается сильный и ровный шум. Игра началась, все замерли. Тихо. А затем вдруг, начавшись где-то, нарастает и достигает оглушительной силы единодушный крик «шай-бу, шай-бу». Все кричат в унисон, кричат синхронно, чем и достигается эффект, подобный лазерному.

В первом лазере был применен рубин — монокристалл окиси аллюминия (Al_2O_3). В кристалле рубина часть атомов алюминия заменена атомами хрома. При концентрации около 0,05% примесь хрома придает рубину характерный розовато-красный цвет.

Инверсия населенностей в рубине достигается с использованием трех уровней энергии и вспомогательного излучения накачки. В методе трех уровней для увеличения числа атомов на верхнем энергетическом уровне или (что эквивалентно) для уменьшения их числа на нижнем уровне применяется мощное вспомогательное излучение, которое связывает один из рабочих уровней с третьим вспомогательным уровнем и перекачивает атомы снизу вверх.

В настоящее время рекордные энергии и мощности в импульсе дают лазеры на рубине и лазеры на стекле с примесью неодима. Поэтому они представляют наибольший интерес.

Основной элемент лазера на рубине — кристалл синтетического рубина высокой однородности. Кристалл обычно имеет форму цилиндра диаметром $0{,}4 \div 2$ *см* и длиной $3 \div 20$ *см*. Источником возбуждения является лампа-вспышка. Накачка происходит следующим образом. Атомы хрома, которые до вспышки находились на нижнем невозбужденном уровне, благодаря поглощению зеленого или синего цвета, содержащегося в излучении лампы-вспышки, переходят в возбужденное состояние (рис. 5). Время жизни атомов на верхнем возбужденном уровне мало (менее 10^{-7} *сек*). Они быстро переходят на нижний возбужденный уровень, отдавая избыточную энергию решетке кристалла, то есть нагревая кристалл. На новом возбужденном уровне время жизни уже сравнительно велико и составляет примерно 10^{-3} *сек*. Поэтому этот уровень называется метастабильным. С

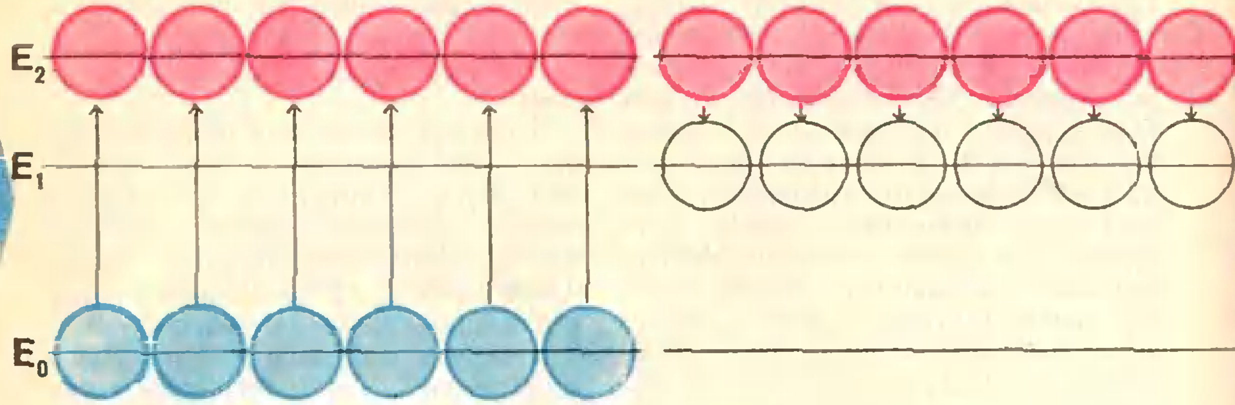


Рис. 5

него атомы переходят в основное невозбужденное состояние с испусканием кванта света в красной области спектра.

При достаточно мощной вспышке можно перебросить на метастабильный уровень достаточное количество частиц для создания сильной инверсии.

В качестве ламп накачки применяются мощные газоразрядные лампы. Вначале они делались в виде спирали, охватывающей кристалл. Сейчас, как правило, используются более мощные стержневые лампы, устанавливаемые параллельно кристаллу. Лампы работают в импульсном режиме. Длительность импульса вспышки составляет примерно тысячную долю секунды (1 *мсек*). Вспышка производится от батареи конденсаторов емкостью до 10 000 *мкф*, заряженных до нескольких тысяч вольт. При разряде через лампу конденсаторы в одном испульсе отдают энергию в десятки, а то и в сотни тысяч джоулей. Мощность накачки в импульсе может превышать десятки миллионов ватт.

Только часть энергии излучения лампы-вспышки, приходящаяся на зеленую и голубую части спектра, идет на возбуждение ионов хрома. Остальная часть переходит в тепло.

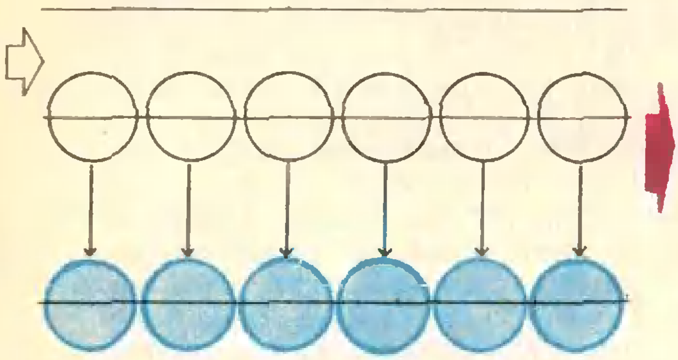
Использование имиульсного режима обусловлено двумя обстоятельствами. Во-первых, трудно иметь источник света накачки большой мощности, работающий непрерывно. Во-вторых, кристалл сильно нагревается при длительном возбуждении и теряет оптическую однородность.

Естественно, что при импульсной накачке генерация тоже носит импульсный характер. При этом полученная в кристалле инверсия может быть реализована двояко. Рассмотрим обе возможности.

Пусть зеркала-отражатели настроены в резонанс и жестко закреплены. Тогда, как только на метастабильном уровне накопится достаточное количество частиц, начнется генерация, которая будет продолжаться до тех пор, пока накачка будет эффективна. Обычно такая так называемая свободная генерация начинается через $100 \div 300$ *мсек* после начала вспышки и продолжается 1 *мсек*.

В режиме свободной генерации большие кристаллы при мощной накачке дают в импульсе энергию до 1000 джоулей. Этому соответствует импульсная мощность до миллионов ватт.

Другой режим достигается путем включения зеркал резонатора в тот момент, когда инверсия достигла максимальной величины. Тогда все накопленные на метастабильном уровне частицы излучают практически сразу, и генератор выдает гигантский импульс излучения очень короткой длительности $10^{-8} \div 10^{-9}$ *сек* со сравнительно небольшой энергией (около трех джоулей). Но так как эта энергия излучается в очень короткое время,



то максимум мощности импульса достигает значений 300 миллионов — 3 миллиарда ватт.

Здесь встает вопрос о коэффициенте полезного действия лазера (к. п. д.). Из приведенных оценок видно, что в лазерное излучение преобразуется лишь малая доля энергии накачки. В режиме свободной генерации к. п. д. рубинового лазера менее 1%, в режиме гигантских импульсов и того меньше.

В чем же тогда выигрыш, который дает лазер?

Дело в том, что мы, проигрывая в количестве энергии излучения, неизмеримо выигрываем в его качестве. Это новое качество — монохроматичность и направленность — обусловленно свойствами эффекта индуцированного излучения.

Длина волны излучения рубинового лазера равна 6943 Å $= 6{,}943 \cdot 10^{-5}$ *см*. И в окрестности этой длины волны, в очень узком интервале с шириной порядка 0,1 Å, заключена вся мощность лазера. Ширина же спектра излучения теплового источника видимого света составляет примерно 3000 Å, то есть в 30 000 раз больше.

Один из самых мощных тепловых источников света — наше Солнце — с одного квадратного сантиметра поверхности в видимом свете излучает мощность $8 \cdot 10^3$ *вт/см²*. При этом на интервал длин волн в 0,1 Å приходится 0,2 *вт/см²*. А рубиновые лазеры дают в этом интервале $10^6 \div 10^9$ *вт/см²*!

Соответствующие электрические поля составляют $3 \cdot 10^4 \div 10^6$ *в/см*. Солнце в том же интервале длин волн создает поле 12 *в/см*.

Новое качество лазерного излучения можно проиллюстрировать следующим образом. Излучение Солнца в принципе не может нагреть какое-либо тело до температуры выше 6000°. Световое излучение газоразрядных ламп более ярких, чем Солнце, не способно нагреть тело до температуры свыше 10 000°. Но когда то же излучение газоразрядных ламп, пусть даже с большой потерей энергии, преобразовано в лазерное монохроматическое излучение со спектральной плотностью энергии в миллиарды раз больше исходной, то оно может нагреть тело до нескольких миллионов градусов.

Лазеры на кристаллах могут работать и в непрерывном режиме. Но бо́льшие мощности дают, конечно, импульсные лазеры.

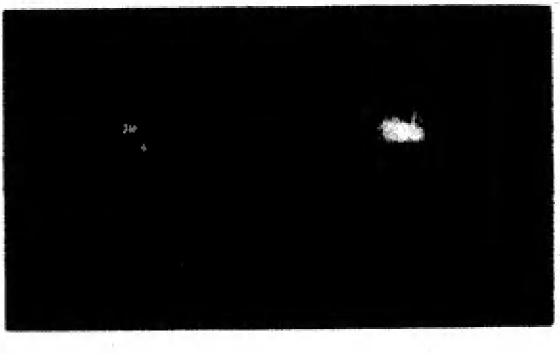
Несколько особняком стоят газовые лазеры. В настоящее время лазеры на газах, возбуждаемых электрическим разрядом, работают в очень широком диапазоне частот — от ультрафиолетового излучения до далекого инфракрасного. Основной конструктивный элемент газового лазера — газоразрядная трубка, то есть трубка, в которой поддерживается электрический разряд в газе. Обычно газ разрежен до давлений, в $100 \div 1000$ раз меньших атмосферного. Материал трубок — стекло или кварц. Длина трубок в зависимости от назначения лежит в пределах от 5 *см* до 50 *м*. Газоразрядные трубки газовых лазеров в значительной мере подобны трубкам неоновой светящейся рекламы. Зеркала лазеров установлены либо непосредственно на торцах газоразрядных трубок, либо снаружи, но в любом случае строго перпендикулярно оси трубки.

В настоящее время наиболее распространенным является неон-гелиевый лазер непрерывного действия на волну 6328 Å (красный свет). С его помощью получены световые колебания очень высокой стабильности и высокой монохроматичности. Хотя к. п. д. этого лазера крайне невелик ($\approx$0,01%), высокая степень монохроматичности и направленности его излучения, обусловленные, в частности, однородностью его газовой активной среды, сделали этот лазер незаменимым при всякого рода юстировочных и нивелировочных работах: при прокладке метро, выравнивании взлетно-посадочных полос больших аэродромов и т. п.

Большим достижением стало создание мощного лазера непрерывного действия, рабочим телом которого служит смесь углекислого газа, азота и гелия. Он дает инфракрасное излучение с длиной волны $\lambda = 10{,}6$ *мк*. Интерес к этому лазеру обусловлен прежде всего тем, что его к. п. д., достигающий 30%, превосходит к. п. д. всех существующих в настоящее время лазеров, работающих при комнатной температуре. Уже сейчас с помощью этого лазера можно получить в непрерывном режиме мощность в 10 киловатт.

Монохроматичность, направленность и высокая мощность этого лазера делают его весьма перспективным для целого ряда технологических применений. На рис. 6 показано, как инфракрасный луч CO_2-лазера прожигает отверстие в куске горной породы.

Рис. 6



Сейчас промышленность выпускает лазеры различных типов. Они используются как эффективный инструмент в научных исследованиях, для решения разного рода практических задач медицины (бескровный скальпель) и технологии (точная обработка тугоплавких материалов, раскрой текстильных материалов).

Лазерный луч измерил расстояние до Луны с большей точностью, чем это было сделано радиосредствами. После того как на Луне был установлен специальный отражатель, расстояние до нее было измерено с точностью до четырех метров.

Самое широкое применение лазеры нашли в физике. Они дают возможность проводить уникальные физические эксперименты. Например, с помощью лазеров, работающих в режиме гигантских импульсов, осуществлен пробой воздуха электрическим полем световой волны. Этот пробой происходит в фокусе линзы, собирающей энергию лазерного пучка в точку. Монохроматичность и высокая направленность лазерного излучения позволяют при фокусировании концентрировать лазерный свет в очень малом объеме (в принципе размер пятна в фокусе может быть доведен до длины волны). В образующуюся при пробое лазерную «искру» практически мгновенно «вкачивается» почти вся энергия импульса. Плазма «искры» сильно разогревается. Получена температура в несколько миллионов градусов. Установлено, что лазерная искра излучает рентгеновские лучи. Уже получены первые нейтроны, рожденные возникающей при таком нагреве термоядерной реакцией.

Работа с лазерами ведется в лабораториях всего мира. Многое сделано, но много еще нерешенных проблем. Нет сомнения, что развитие квантовой электроники будет и дальше продолжаться высокими темпами.

Геометрические неравенства

М. И. БАШМАКОВ

На страницах нашего журнала начинает свою работу математический кружок. Темы его занятий будут в основном доступны уже восьмиклассникам, но мы надеемся, что они будут интересны всем читателям «Кванта».

Первое занятие кружка посвящается геометрическим неравенствам.

В самом начале изучения геометрии мы знакомимся с важным фактом: сторона треугольника меньше суммы двух других сторон (рис. 1). Одно это неравенство, которое называют *неравенством треугольника*, позволяет решить ряд интересных геометрических задач.

Задача 1. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин больше половины периметра этого треугольника.

Решение. Рассмотрим треугольники AOB, BOC и COA (рис. 2) и напишем три неравенства треугольника:

$$AO + OB > AB,$$
$$BO + OC > BC,$$
$$CO + OA > CA.$$

Складывая эти неравенства и деля пополам, получим

$$AO + BO + CO > \frac{1}{2}(AB + BC + CA),$$

что и требовалось доказать.

Попробуйте решить самостоятельно еще несколько задач на доказательство неравенств. Надо разумно выбирать треугольники, выписывать неравенства для их сторон и преобразовывать эти неравенства к нужному виду.

Докажите, что:

Задача 2. Сумма диагоналей выпуклого пятиугольника меньше удвоенного периметра.

Задача 3. Сумма диагоналей выпуклого пятиугольника больше периметра.

Рис. 1

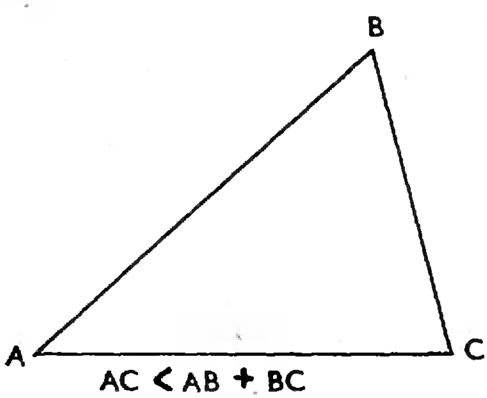
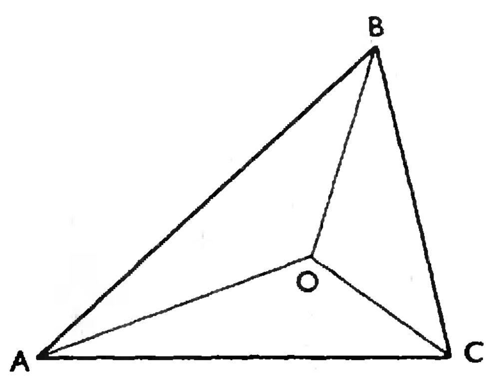


Рис. 2



Задача 4. Медиана треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она заключена.

Задача 5. Сумма медиан треугольника меньше периметра, но больше трех четвертей периметра.

Вы, наверно, обратили внимание на то, что в каждой задаче приходится по-своему выбирать, каким способом, в какую сторону проводить оценку (устанавливать неравенство). При этом не всегда удается сразу получить нужный результат. Например, в последней задаче легко получить, что сумма медиан больше половины периметра. (Достаточно рассмотреть треугольники ABD, BCF и CAE на рис. 3.) В то же время из других треугольников можно получить более точную оценку, требуемую в задаче. Возникает вопрос: какова наибольшая константа k_1, для которой верна оценка

$$k_1 p < m_a + m_b + m_c?$$

(здесь m_a, m_b, m_c — медианы к сторонам a, b и c, а p — периметр треугольника). Точно так же, интересно получить точную оценку и с другой стороны: найти наименьшую константу k_2, для которой неравенство

$$m_a + m_b + m_c < k_2 p$$

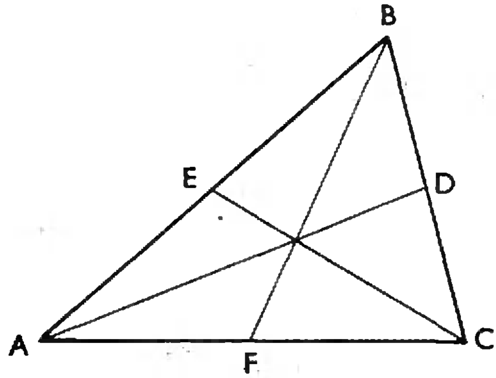
верно для любого треугольника.

Задача 6. Докажите, что при сравнении суммы медиан треугольника с его периметром лучшими (т. е. крайними) константами будут $k_1 = \frac{3}{4}$ и $k_2 = 1$. Более точно: докажите, что отношение

$$x = \frac{m_a + m_b + m_c}{p}$$

принимает все значения между $\frac{3}{4}$ и 1.

Рис. 3

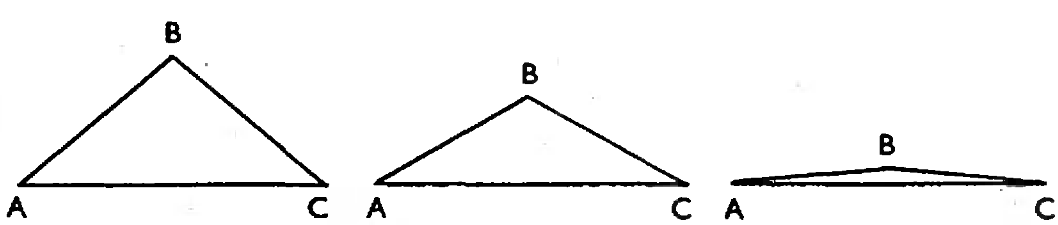


Обратим внимание на то, что неравенства во всех предыдущих задачах были строгие. Если мы хотим приблизиться к границе, т. е. искать треугольники, для которых неравенство близко к равенству, мы должны и треугольники выбирать близкие к «вырожденным». Так, чтобы показать неулучшаемость оценки

$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4} p,$$

можно рассмотреть, например, такие равнобедренные треугольники, вер-

Рис. 4



шины которых приближаются к основанию (рис. 4). Ясно, что их периметр близок к удвоенной стороне основания, а сумма медиан близка к $\frac{3}{2}$ основания. Равенство получится, когда вершина упадет на основание, а треугольник «вырождится» в двойной отрезок.

Вообще, для любого числа x из интервала

$$\frac{3}{4} < x < 1$$

можно указать такой равнобедренный треугольник, для которого

$$\frac{m_a + m_b + m_c}{p} = x.$$

Это позволяет решить задачу 6.

З а д а ч а 7. Докажите, что сумма расстояний любой точки внутри треугольника до его вершин меньше периметра.

З а д а ч а 8. Сравните задачи 1 и 7, 2 и 3; поставьте и исследуйте вопрос, аналогичный тому, который мы обсуждали относительно медиан.

З а д а ч а 9. Рассмотрим всевозможные выпуклые n-угольники (n — определенное число). Возьмем точку внутри такого многоугольника и составим отношение суммы ее расстояний до вершин к периметру. Какие значения это отношение может принимать? *)

В следующих задачах нужно использовать, кроме неравенства треугольника, некоторые другие простые неравенства, например то, что из двух сторон треугольника больше та, которая лежит против большего угла, в частности, что гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета, и т. п.

З а д а ч а 10. Докажите, что для всех прямоугольных треугольников верны следующие неравенства: $0,4 < \frac{r}{h} < 0,5$, где r — радиус вписанного круга, h — высота, опущенная из вершины прямого угла. Являются ли написанные границы точными?

З а д а ч а 11. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC берется точка M, отличная от C. Докажите, что сумма ее расстояний до вершин A и B больше, чем сумма расстояний от точки C до этих же вершин.

З а д а ч а 12. Для того чтобы угол A в треугольнике ABC был острым, необходимо и достаточно, чтобы медиана, проведенная из вершины A, была более чем вдвое больше стороны BC.

З а д а ч а 13. В остроугольном треугольнике ABC наибольшая из высот (обозначим ее через AH) равна медиане BM. Докажите, что угол ABC меньше 60°.

З а д а ч а 14. На продолжении наибольшей стороны AC треугольника ABC отложен отрезок $CD = BC$. Докажите, что угол ABD тупой.

З а д а ч а 15. A, B, C, D — последовательные вершины выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если

$$AB + BD \leqslant AC + CD,$$

то

$$AB \leqslant AC.$$

*) Ср. задачу 4 на стр. 59 первого номера «Кванта».

ЛИТЕРАТУРА

Б. Делоне и О. Житомирский, Задачник по геометрии. Физматгиз, 1959.

З. А. Скопец, В. А. Жаров, Задачи и теоремы по геометрии. Планиметрия. Учпедгиз, 1962.

И. Е. Сивашинский, Неравенства в задачах.

К концу прошлого века в физике и в химии утвердилась, как тогда говорили, г и п о т е з а об атомах и молекулах — мельчайших частицах, из которых составлены все тела окружающего нас мира. В химии атомная гипотеза позволила понять и очень удобно описывать химические реакции: всякая реакция — это просто соединение атомов в молекулы или, наоборот, разложение молекул на атомы или группы атомов. Из анализа состава различных молекул химики сумели выяснить, что атомы разных элементов обладают различными массами. Им даже удалось узнать, во сколько раз один атом тяжелее или легче другого; уже к началу второй половины XIX столетия были известны так называемые а т о м н ы е в е с а всех открытых к тому времени химических элементов, то есть числа, показывающие, во сколько раз атом данного химического элемента тяжелее самого легкого из атомов — водорода. Знаменитый русский химик Д. И. Менделеев, расположив химические элементы в порядке возрастания атомных весов, показал в 1869 году, что они образуют определенную с и с т е м у, в которой свойства элементов периодически повторяются (периодическая система). В физике гипотеза об атомах и молекулах играет не менее важную роль. Она позволила физикам составить себе ясное представление о множестве самых различных явлений. Она помогла понять, что такое тепло и холод, почему тела при нагревании расширяются, почему всякое вещество может быть твердым, жидким и газообразным и многое другое. Чтобы все это понять, нужно было только дополнительно предположить, что атомы и молекулы непрерывно

КАК БЫЛ ВЗВЕШЕН АТОМ

и беспорядочно движутся и что между ними действуют силы притяжения и отталкивания.

Но при всем этом атомы оставались только некоторым представлением в головах людей. Их не только никто не видел, потому что они очень малы, но никто не знал, насколько они малы, каковы массы атомов, сколько атомов в том или ином теле. Нельзя сказать, чтобы не делались попытки все это как-то узнать. Но эти попытки не приводили к убедительным результатам. У некоторых ученых появилась даже уверенность в том, что об атомах и молекулах ничего и нельзя будет узнать, потому что их на самом деле не существует. Эти ученые полагали, что атомы — это нечто вроде меридианов и параллелей на географической карте: ими удобно пользоваться, но реально в природе их нет.

Физики, однако, не теряли надежду доказать реальность атомов и молекул, взвесить их, сосчитать их число, определить их размеры.

В предлагаемом отрывке из книги выдающегося советского физика-теоретика Матвея Петровича Бронштейна «Атомы, электроны, ядра» рассказывается о том, как впервые удалось измерить массу атомов и даже сосчитать их. Эта книга, изданная в 1935 году небольшим тиражом (всего 10 000 экземпляров), давно уже стала библиографической редкостью.

Публикацию подготовил профессор А. К. Кикоин. Сделанные им добавления взяты в прямые скобки.

... И в конце концов атом действительно удалось взвесить. Этому помогло одно очень странное явление, открытое еще в первой половине XIX века и на которое физики в свое время не обратили должного внимания. Это явление называется броуновским движением.

В 1828 году знаменитый английский ботаник Роберт Браун проделал одно в высшей степени интересное наблюдение. Испытывая только что присланный ему новый усовершенствованный микроскоп с ахроматическим объективом, Роберт Браун вздумал рассмотреть с помощью этого микроскопа ничтожную каплю жидкости, содержащуюся в крохотных зернышках пыльцы растений. В такой жидкости всегда имеется большее количество микроскопических твердых частиц. Как удивлен был Браун, когда увидел, что эти частицы не остаются на месте, а движутся, движутся непрерывно, точно исполняя какой-то фантастический танец! Когда в поле зрения микроскопа было видно много таких частиц, то получалось такое же впечатление, как от тучи каких-то мельчайших мошек. Твердые частицы микроскопических размеров, находящиеся в жидкости, движутся, как если бы они были живыми... Но уже Роберт Браун, который первым наблюдал это хаотическое движение микроскопических частиц, получившее свое название от его имени, пришел к другому заключению: частицы движутся не потому, что они живые... Так утверждал Браун, и это было подтверждено многочисленными последующими наблюдениями.

Можно было бы думать, что броуновское движение микроскопических частиц вызывается какими-то потоками в самой жидкости, связанными с разностью давлений в различных точках жидкости. Всякому приходилось наблюдать движение пылинок в воздухе, освещенном падающими сбоку солнечными лучами. Это движение действительно связано с такими токами воздуха, но броуновское движение имеет совершенно другой характер. В самом деле, если внимательно наблюдать за движением пылинок в солнечном луче, то легко заметить, что соседние пылинки, попавшие в одну и ту же небольшую струю воздуха, движутся в одну и ту же сторону. А если наблюдать за броуновским движением микроскопических частиц, то оказывается, что между направлением движения соседних частиц нет решительно ничего общего: частицы движутся совершенно независимо друг от друга, даже если им случается подойти друг к другу на самое крохотное расстояние, равное диаметру отдельной частички. Значит, совсем не от токов жидкости происходит это непостижимое и фантастическое движение микроскопических твердых частичек.

Во второй половине XIX века броуновское движение подробно исследовал французский физик Гуи. Он проделал целый ряд опытов, которые убедили его в том, что причина броуновского движения скрыта в самой жидкости. Не от внутренних токов жидкости, вызванных ничтожными разностями температур, и не от внешних толчков и сотрясений происходит броуновское движение. Гуи пробовал сравнивать броуновское движение в лаборатории, расположенной на шумной улице, по которой проезжают тяжелые экипажи, с тем же броуновским движением, наблюдаемым ночью в глухом подвале в деревне. Разницы не получалось никакой. Толчки от экипажей заметны, но они сказываются не на хаотическом движении броуновских частиц, а на движении всей капельки жидкости в целом: двигаясь, как целое, капелька увлекает за собой все частицы в одном и том же направлении, и это движение очень легко отличить от накладывающегося на него хаотического движения броуновских частиц, происходящего по всем возможным направлениям.

Гуи убедительно доказал, что броуновское движение, как уже предполагал и сам Браун, нисколько не связано с тем, что жидкость, в которой оно наблюдается, взята из живого существа — из растения: искусственно приготовленные жидкости с взвешенными в них микроскопическими частицами, в которых нет ничего живого, тоже обнаруживают броуновское движение. В 1881 году польский физик Бодашевский показал, что броуновское движение происходит и в газах, а не только в жидкостях.

Для того чтобы наблюдать броуновское движение, он рассматривал при боковом освещении микроскопические частички, образующие табачный дым. Крохотные частички угля, из которых состоит дым, плясали во все стороны совершенно таким же образом, как плясали твердые частички, наблюдавшиеся Робертом Брауном в жидкости.

Настоящую причину броуновского движения угадал в 70-х годах прошлого столетия бельгиец Карбонель.

Его объяснение, гениальное по своей простоте, состоит в следующем: *микроскопические частицы движутся потому, что они испытывают толчки со стороны невидимых молекул и атомов окружающей их жидкости.* Рассматривая движение брауновских частичек, мы получаем некоторое представление о том, как движутся невидимые молекулы жидкости, совершенно таким же образом, как мы угадываем о волнении на море, когда, стоя далеко от берега, видим качание лодки, швыряемой волнами во все стороны. Брауновское движение является поэтому мостом, соединяющим невидимый мир атомов и молекул с миром, доступным восприятию при помощи наших органов чувств.

Почему брауновское движение можно наблюдать только в том случае, когда частички очень малы? Очень просто, отвечает на этот вопрос Карбонель; если поверхность частицы велика, то количество толчков, получаемых ею справа, всегда окажется приблизительно равным количеству толчков, получаемых ею же слева, и ничтожное различие в количестве толчков будет совершенно недостаточно для того, чтобы сдвинуть с места большую и тяжелую частицу. Если же частица имеет ничтожную массу и ничтожные размеры, то в хаосе молекулярных движений жидкости всегда может случиться, что с одной стороны частицы будет в данный момент случайно больше толчков, чем с другой, а поэтому легкоподвижная частица двинется в ту сторону, куда ее толкнут молекулы. Через какой-то очень короткий промежуток времени избыток молекулярных толчков будет сдвигать брауновскую частицу уже по другому направлению, еще через какой-то короткий промежуток времени — по третьему и т. д.

Если это предложенное Карбонелем объяснение правильно, то чем частицы легче и мельче, тем брауновское движение должно быть интенсивнее. Так и есть в действительности — уже Браун сумел это заметить. Кроме того, ведь мы знаем, что движение молекул жидкости происходит тем быстрее, чем выше температура; и в самом деле, Гуи нашел, что при повышении температуры брауновское движение делается все интенсивнее и интенсивнее. Когда Жигмонди изобрел ультрамикроскоп и смог наблюдать ничтожнейшие частицы золота в коллоидном растворе (диаметр частиц меньше миллионной доли сантиметра), то брауновское движение этих частиц оказалось таким быстрым, что получилось какое-то сплошное мелькание. Жигмонди описывает свое первое впечатление так: «Это какое-то непрерывное прыганье, пляска, скакание, столкновения и разлетания, так что трудно разобраться в этой путанице»...

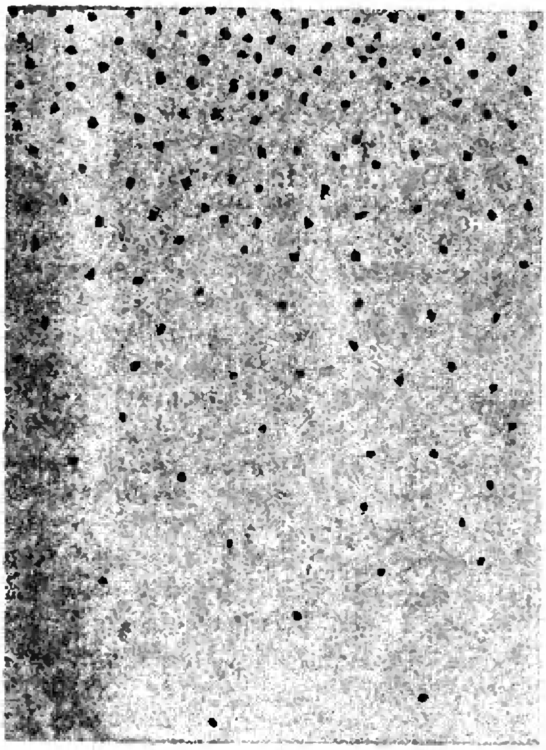
Мы переходим теперь к рассказу о классических работах, которые сделал французский физик Жан Перрен (1908 г.). В этих работах было окончательно проверено и установлено, что брауновское движение в жидкостях вызвано движением молекул и тем самым дано решающее доказательство действительного существования молекул и атомов.

Перрен брал кусочки резиновой смолы «гуммигута» и растирал их рукой в воде, пока она не становилась ярко-желтого цвета. После этого Перрен брал немножко такой жидкости под микроскоп. Под микроскопом оказывалась, что гуммигут на самом деле не растворился в воде, а распался на множество шаровидных мелких зернышек, которые разбрелись по всему объему воды. Зернышки эти очень различны по размерам. А Перрену хотелось иметь такую жидкость, в которой были бы совершенно одинаковые по размерам частицы гуммигута. Для этого он воспользовался «центрифугой» (центробежной машиной), такой же самой, какой пользуются на крупных молочных фермах для отделения сливок от молока или же в медицинских лабораториях для удаления кровяных шариков из крови, после чего остается однородная жидкость — кровяная плазма. Центрифуга Перрена делала 2500 оборотов в минуту, и возникающая при этом центробежная сила выбрасывала из жидкости зернышки гуммигута. Перпендикулярно к оси центрифуги были расположены стеклянные пробирки, в которых содержалась эмульсия гуммигута (так называется вода с взвешенными в ней частичками гуммигута).

Первыми выпадали тяжелые частицы, а вслед за ними и легкие. Это давало возможность отделить частицы друг от друга по весу (а значит, и по размерам, потому что все частицы сделаны из одного и того же материала, и поэтому, чем больше их масса, тем больше и размеры).

Это очень кропотливая и тяжелая работа: приходится работать целый месяц для того, чтобы из одного килограмма гуммигута получить несколько десятых или даже сотых долей грамма круглых зерен нужной величины. Таким образом, Перрен сумел получить несколько порций эмульсии с диаметром зерен в 0,5, 0,46, 0,37, 0,21 и 0,14 микрона

Распределение зернышек по высоте в гуммигутовой эмульсии.



(микрон — это тысячная доля миллиметра).

С помощью таких эмульсий Жан Перрен произвел множество замечательных опытов, о которых мы здесь и расскажем. Он поместил каплю эмульсии с определенным диаметром зерен в плоскую ванночку (кювету) с глубиной 0,1 *мм*. Кювета была затем покрыта тонким покровным стеклышком, края которого были залиты парафином: таким образом, капля оказалась размазанной в сосуде, в котором она герметически заперта, так что никакое испарение уже невозможно.

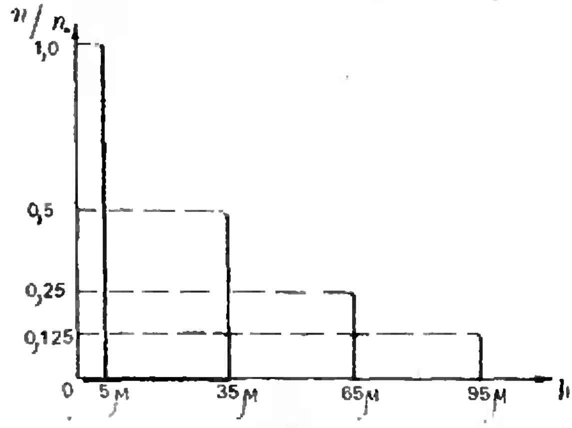
Перрен сперва поставил свою кювету набок и стал смотреть на нее в микроскоп. В поле зрения микроскопа оказалась тонкая вертикальная водяная стенка, внутри которой распределялись участвующие в брауновском движении зернышки гуммигута. Распределение зернышек сперва было однородным, но потом, с течением времени, распределение изменилось и в конце концов стало таким: очень много зернышек внизу, а по мере продвижения вверх их становится все меньше и меньше (см. рисунок). Число зернышек в одном кубическом микроне уменьшается с увеличением высоты и притом по некоторому вполне определенному закону.

Этот закон уменьшения плотности эмульсии с высотой Перрен захотел исследовать. Для этого он положил кювету на дно, и после того как частицы расположились по высоте подобно тому, как в кювете, стоящей вертикально, стал смотреть на кювету сверху в микроскоп, имевший очень маленькую глубину поля зрения: в микроскоп было видно все, что происходит в тонком слое глубиной в один микрон. Передвигая микроскоп вверх и вниз, можно было помещать этот слой то выше, то ниже. Перрен стал работать так: поставил микроскоп на какой-то высоте и начал считать, сколько зернышек виднеется в поле зрения на этой высоте, затем передвинул микроскоп на новую высоту и снова сосчитал число зернышек и т. д. Заметим, что при этом числом зернышек считается среднее из нескольких наблюдений, потому что зернышки движутся совершенно хаотически и, следовательно, их число в поле зрения микроскопа бывает то больше, то меньше в зависимости от случая. Поэтому на одной и той же высоте Перрен производил подсчет зернышек много раз и затем уже вычислял значение, характерное для каждой такой высоты.

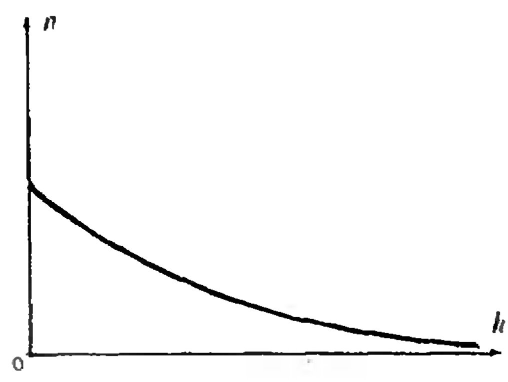
Фотографии гуммигутовой эмульсии, сделанные Ж. Перреном через микроскоп.

Приведем результаты одного из опытов Перрена. Глубина кюветки была, как мы уже говорили, 100 микрон (то есть 0,1 *мм*). Отсчеты производились на высотах 5, 35, 65 и 95 микрон над уровнем донышка кюветки. Оказалось, что среднее число частиц на высоте 35 микрон составляет половину того, которое было на высоте 5 микрон, число частиц на высоте 65 микрон было равно половине числа частиц на высоте 35 микрон, а число частиц на высоте 95 микрон равнялось половине числа частиц на высоте 65 микрон. Иными словами, при поднятии вверх на каждые 30 микрон число частиц в данном объеме (соответствующем глубине и ширине выбранного поля зрения) уменьшалось вдвое. Поэтому математический закон убывания плотности (числа частиц в данном объеме, а значит, и в каждой единице объема) с высотой может быть словами выражен так: *если высоты образуют арифметическую прогрессию, то числа зерен образуют геометрическую прогрессию*.

Такой закон убывания плотности зерен с высотой должен был сильно поразить и заинтересовать Перрена: ведь по такому же самому закону спадает плотность при поднятии в нашей атмосфере. Блэз Паскаль, знаменитый французский ученый, живший в XVII столетии и впервые



Результаты опытов Перрена.



Так изменяется количество молекул воздуха с высотой.

применивший к изучению атмосферы барометр, изобретенный итальянцем Торричелли, обнаружил закон, по которому спадает с увеличением высоты плотность атмосферного воздуха. Этот закон, получивший название барометрической формулы, гласит то же самое: *плотность каждого из газов, составляющих атмосферу, убывает вместе с увеличением высоты в геометрической прогресии.*

[Закон этот можно выразить и математически, в виде формулы.

Предположим, что на какой-то высоте h_0 над Землей в каждом кубическом сантиметре содержится n_0 молекул какого-то газа. На какой-то другой, большей высоте h таких же молекул в одном кубическом сантиметре будет, конечно, меньше, например n. Тогда барометрическая формула может быть записана в таком виде:

$$\lg \frac{n_0}{n} = Amg\,(h - h_0)^{*}). \qquad (1)$$

Здесь A — это некоторая постоянная величина, одинаковая для всех газов (при данной температуре), а m — масса молекулы того газа, о котором идет речь, g — ускорение силы тяжести.

Сразу видно, что в левой части равенства стоит отношение чисел частиц в единице объема (правда, под знаком логарифма), а в правой — разность высот. Это и означает, что если высоты образуют арифметическую прогрессию, то числа частиц образуют прогрессию геометрическую.

Выберем такую разность высот $h - h_0$, чтобы число частиц n на высоте h было вдвое меньше числа частиц n_0 на высоте h_0. Тогда формула (1) примет вид

$$\lg 2 = Amg\,(h - h_0). \qquad (2)$$

В таблице логарифмов легко найти, что $\lg 2 = 0{,}30103$, так что

$$0{,}30103 = Amg\,(h - h_0). \qquad (3)$$

Если бы было известно численное значение постоянной A, то, подсчитав число частиц в единице объема n и n_0 на высотах h и h_0, легко было бы вычислить и массу молекулы m, то есть взвесить ее. Правда, сосчитать

---

*) Если k — это число «шагов», за которое мы поднимаемся на высоту h, а Δh — высота «шага», то $h = h_0 + (k-1)\,\Delta h$, а $n = n_0\left(\frac{1}{q}\right)^{k-1}$, где $\frac{1}{q}$ — знаменатель прогрессии, которую составляет плотность газа ($q > 1$). Из этих двух формул, исключив k, мы найдем, что

$$\lg \frac{n_0}{n} = \frac{\lg q}{\Delta h}\,(h - h_0). \qquad (*)$$

Аналогичную формулу можно записать и для другого газа; величины, относящиеся к нему, мы снабдим штрихом:

$$\lg \frac{n_0'}{n'} = \frac{\lg q'}{\Delta h'}\,(h' - h_0'). \qquad (**)$$

Очень важным оказывается то обстоятельство, что, если плотности первого и второго газов уменьшились в одно и то же число раз, то есть $\frac{n_0}{n} = \frac{n_0'}{n'}$, то отношение разностей высот, при которых это произошло, $\frac{h - h_0}{h' - h_0'}$ в точности равно обратному отношению масс молекул этих газов:

$$\frac{h - h_0}{h' - h_0'} = \frac{m'}{m}.$$

Разделим почленно уравнение (*) на уравнение (**):

$$1 = \frac{\lg q\,(h - h_0)\,\Delta h'}{\lg q'\,(h' - h_0')\,\Delta h}, \text{ или}$$

$$\frac{\lg q}{\lg q'} = \frac{\Delta h m}{\Delta h' m'}.$$

Таким образом, $\lg q \sim \Delta h m$. Это дает возможность записать, что

$$\lg q = A_1 \Delta h m,$$

где A_1 — это некоторая постоянная величина, не зависящая от величины шага и одинаковая для всех газов (при данной температуре).

Теперь барометрическую формулу (*) мы можем записать в таком виде:

$$\lg \frac{n_0}{n} = A_1 m\,(h - h_0).$$

молекулы мы тоже не можем, но ведь нам и не надо знать каждое из чисел n и n_0 в отдельности. Нужно знать только их отношение. А его легко найти, если измерить барометром давления на высотах h и h_0: отношение давлений как раз и равно отношению чисел частиц в единице объема. Но дело в том, что величина A во времена Перрена не была известна (именно опыты Перрена и позволили определить ее). Поэтому Перрен мог рассуждать так: известно, например, что] при поднятии на 5 *км* количество кислорода, находящегося в кубическом сантиметре, уменьшается вдвое; при поднятии на следующие 5 *км* оно уменьшается еще вдвое и т. д. и т. д. Это — тот же закон, по которому уменьшается с высотой число зернышек гуммигута в кубическом сантиметре эмульсии, но только здесь иные масштабы — вместо 30 микрон здесь мы имеем 5 *км*. Отчего же здесь получаются другие масштабы?

Слой гуммигутовой эмульсии в 100 микрон — это, в сущности, такая же атмосфера, но только состоящая не из молекул кислорода или азота, а из зернышек гуммигута, которые уже достаточно велики, чтобы их можно было видеть в микроскоп. Вследствие большей массы этих зернышек (по сравнению с молекулами газа) уменьшение плотности с высотой происходит быстрее, чем в обыкновенной атмосфере, окружающей нашу Землю, а именно (в случае гуммигутовых зернышек диаметром 0,21 микрона) плотность уменьшается вдвое при поднятии на 30 микрон. «Эмульсия,— говорит Перрен, — это атмосфера в миниатюре, тяготеющая к Земле. В масштабе такой атмосферы высота Альп представилась бы несколькими микронами, а отдельные холмы стали бы равны молекулам». Для нас всего важнее, что молекулы этой миниатюрной «атмосферы» — зернышки гуммигута — могут быть взвешены, а это позволяет вычислить и массу молекул обыкновенного газа. Так Перрен сумел сделать то, что казалось совершенно невозможным, — взвесить молекулы и атомы.

[Из формулы (3) видно, что произведение м а с с ы молекулы m на р а з н о с т ь в ы с о т, между которыми число молекул в единице объема изменяется вдвое, во всех случаях (то есть для любых частиц) равно одной и той же величине $\frac{0,30103}{A}$. Поэтому, если для гуммигутовых зерен разность высот меньше, чем для кислорода в атмосфере, то это потому, что масса гуммигутового зернышка больше массы молекулы кислорода и как раз во столько раз, во сколько раз 5 *км* больше, чем 30 микрон.]

Проделаем нехитрый расчет... 5 *км* в 166 миллионов раз больше, чем 30 микрон. Значит, масса гуммигутового зернышка с диаметром 0,21 микрона превышает массу кислородной молекулы в 166 миллионов раз.

Сколько же весит такой гуммигутовый шарик? Это нетрудно рассчитать, если измерить предварительно массу кубического сантиметра гуммигута. При этом расчете не следует забывать, что в опытах Перрена зернышки гуммигута находились в воде, а значит, по закону Архимеда каждый кубический сантиметр гуммигута терял в весе ровно столько, сколько весит кубический сантиметр воды, то есть 1 *г*. Значит, каждый кубический сантиметр гуммигута был в воде на один грамм легче, чем в воздухе. В результате всех расчетов (которые мы пропускаем) получается, что масса зернышка (с поправкой на закон Архимеда) была равна $8,5\cdot10^{-15}$ *г*. И она в 166 миллионов раз больше массы молекулы кислорода. Значит, масса молекулы кислорода равна $5,1\cdot10^{-23}$ *г*. А так как молекула кислорода в 32 раза тяжелее атома водорода (молекулярный вес кислорода равен 32), то масса атома водорода — этого самого легкого из всех атомов — равна $1,6\cdot10^{-24}$ *г*. В грамме водорода содержится, следовательно, $6\cdot10^{23}$ атомов.

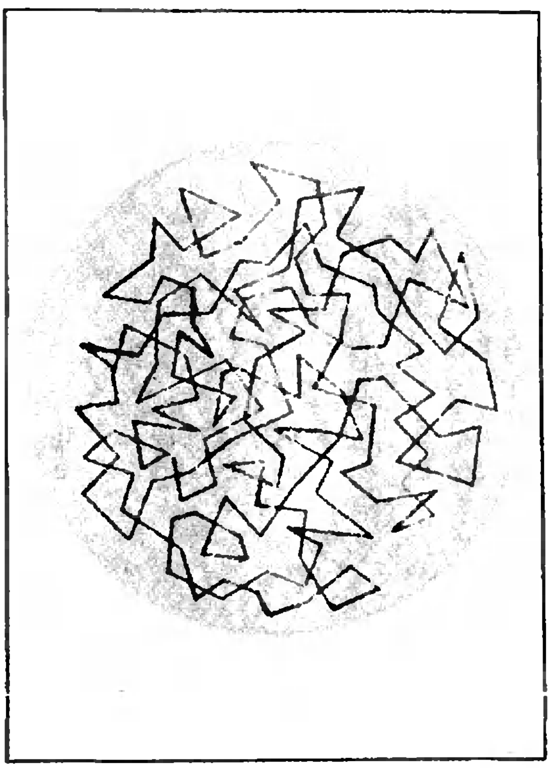
[Так атомы и молекулы были не только взвешены, но и сосчитаны!]

Эти цифры, найденные Перреном, позволили связать употреблявшуюся в то время единицу атомного веса — массу атома водорода — с граммом. Масса атома водорода, выраженная в граммах, получилась настолько ничтожной, что ее никак невозможно себе представить, тем не менее она получилась вполне определенной. Атом был взвешен. Важнейшая задача атомной физики была решена.

[Заметим здесь, что цифры, полученные Перреном, конечно, не очень точны. Впоследствии были найдены другие способы определения масс атомов и молекул, и теперь мы располагаем более правильными значениями масс. По современным данным масса атома водорода, например, равна $1{,}673\cdot10^{-24}$ *г*, а молекулы кислорода — $5{,}314\cdot10^{-23}$ *г*. Как видите, эти цифры не так уж сильно отличаются от тех, что впервые были получены Перреном.]

Вот какой результат получил Перрен, изучая распределение зернышек гуммигута в гуммигутовой эмульсии в зависимости от высоты. Но всего любопытнее то обстоятельство, что точно такой же результат был выведен с помощью тех же гуммигутовых шариков, но совершенно иным путем, о котором мы также скажем несколько слов.

Брауновское движение.



Брауновское движение в гуммигутовой эмульсии совершается необыкновенно быстро. Нет никакой возможности проследить за движением отдельного гуммигутового зернышка. Поэтому Перрен и не пытался этого делать, а поступал следующим образом: он отмечал на чертеже положение гуммигутового зернышка через определенные промежутки времени, например через каждые 30 секунд, и полученные точки соединял прямыми линиями (хотя на самом деле гуммигутовое зернышко за это время двигалось не по прямой, а по причудливой ломаной линии). Полученные рисунки дают возможность судить о беспорядочности, хаотичности брауновского движения вообще. Но Перрен делал эти рисунки не только для того, чтобы получить наглядную иллюстрацию к брауновскому движению. Его интересовала количественная сторона дела. Знаменитый Альберт Эйнштейн, который был тогда еще молодым человеком, написал (в 1905—1906 годах) замечательные работы, где он вывел формулу, определяющую для заданного промежутка времени среднее смещение гуммигутового зернышка относительно его первоначального положения в жидкости. Мы не станем здесь приводить эту замечательную формулу, заметим только, что в эту формулу входит величина, равная числу атомов водорода в одном грамме. Поэтому, сравнивая формулу Эйнштейна с рисунками Перрена, определяющими перемещение частицы за 30 секунд, можно вычислить эту величину. Так и сделал Перрен, и у него получилось, что число атомов водорода в одном грамме равно $6\cdot10^{23}$, то есть получилось такое же число, как и раньше.

Совпадение двух чисел, которые были получены совершенно различными способами, является лучшим доказательством правильности всех сделанных предположений. Значит, молекулы и атомы действительно существуют, а не только являются удобной для химиков выдумкой. Такое заключение вынуждены были сделать даже те, которые долго и упорно не хотели признавать существования атомов.

... Вековой спор между сторонниками и противниками атомов закончился, таким образом, победой сторонников атомной теории. И в настоящее время мы можем с уверенностью утверждать, что все вещи на свете — и вода, и камни, и растения, и животные, и воздух, и железо и т. д. и т. д. — все это состоит из мельчайших невидимых глазу атомов.

ЗАДАЧИ К СТАТЬЕ «КАК БЫЛ ВЗВЕШЕН АТОМ»

1. Пользуясь приведенными в статье данными, найдите, на какой высоте давление уменьшается вдвое. Воздух легче кислорода в отношении 28,8:32.

2. P_0 — давление воздуха на уровне моря, P_1 — на высоте h. Каково давление воздуха на высотах: $2h$, $3h$, nh? Считать, что температура воздуха и ускорение свободного падения не меняются с высотой, и поэтому постоянная A не зависит от высоты.

3. Найдите высоту над поверхностью Земли, где давление воздуха равно 0,25 и 0,125 атмосферного. Постройте кривую зависимости давления воздуха от высоты.

ЛОГИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Будем условно считать, что если человек не будет семь суток есть или семь суток спать, то он умрет. Пусть человек неделю не ел и не спал. Что он должен сделать в первую очередь к концу седьмых суток: поесть или поспать, чтобы остаться в живых. (Несмотря на шутливый характер, задача имеет строгое и единственное решение.)

ВОПРОСЫ ПО ФИЗИКЕ

1. Почему, когда купаясь в жаркий день, вы входите в воду, вода кажется холоднее воздуха, а когда выходите, то наоборот?

2. Почему холодильник время от времени приходится выключать и оттаивать?

3. Коробку, в которой находится мышь, подбрасывают вертикально вверх. Когда мышь находится в состоянии невесомости, если сопротивление воздуха отсутствует?

4. На плиту поставили две одинаковые кастрюли с равными количествами воды при одной и той же температуре. Через некоторое время в одну кастрюлю долили немного кипятка из чайника. В какой кастрюле вода закипит раньше?

4а. Из той кастрюли, где воды больше, отливают во вторую кастрюлю столько, что в них снова становится воды поровну. В какой кастрюле теперь вода закипит раньше?

КРИВЫЕ ДРАКОНА

Н. Б. ВАСИЛЬЕВ, В. Л. ГУТЕНМАХЕР

ЧТО ТАКОЕ КРИВАЯ И ЛОМАНАЯ ДРАКОНА

Возьмите длинную полоску бумаги, сложите ее пополам и еще раз пополам. Сложенную полоску положите ребром на стол и разверните так, чтобы угол при каждом сгибе был равен 90° (рис. 1). Если смотреть сверху, то видна ломаная линия, изображенная на рис. 2, *а* или *б*.

При трех складываниях полоски пополам уже получаются существенно различные ломаные (рис. 2, *в* или *г*) в зависимости от того, как складывается полоска. Если полоску складывать четыре раза и больше, а затем разворачивать ее сгибы до прямых углов, можно получить много различных ломаных. На рис. 3 показана одна из ломаных, получающихся при пяти складываниях пополам.

Практически вам не удастся сложить полоску бумаги больше семи раз — ведь уже при восьмом складывании получилось бы $2^8 = 256$ слоев! Однако мы скоро научимся рисовать довольно длинные такие ломаные, обходясь без полоски. На странице 38 (внизу) уже нарисована одна из ломаных, которая получилась бы, если бы мы складывали полоску 12 раз. Она состоит из $2^{12} = 4096$ звеньев.

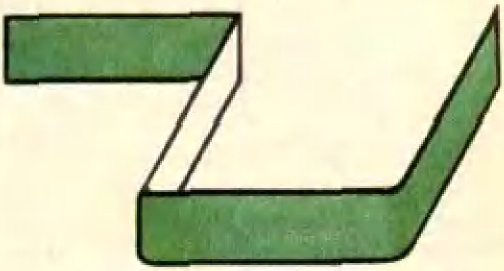


Рис. 1

Легко убедиться в том, что если складывать полоску более трех раз, то после разворачивания некоторые ее углы обязательно будут «касаться» друг друга (рис. 2, *г* и рис. 3). Из-за многочисленных таких касаний на длинных ломаных местами получается сетка. Чтобы разобраться, как идет ломаная, можно закруглить у нее углы (так, как показано на рис. 3 цветной линией). Если проделать это для ломаной, изображенной под рисунком 3, то получится замысловатая линия, нарисованная на предыдущей странице. Этот рисунок и подсказал американскому физику Джону Хейвею (Heighway) название «*кривые дракона*». Тот, кто когда-нибудь видел дракона, мог бы подтвердить, что он выглядит именно так.

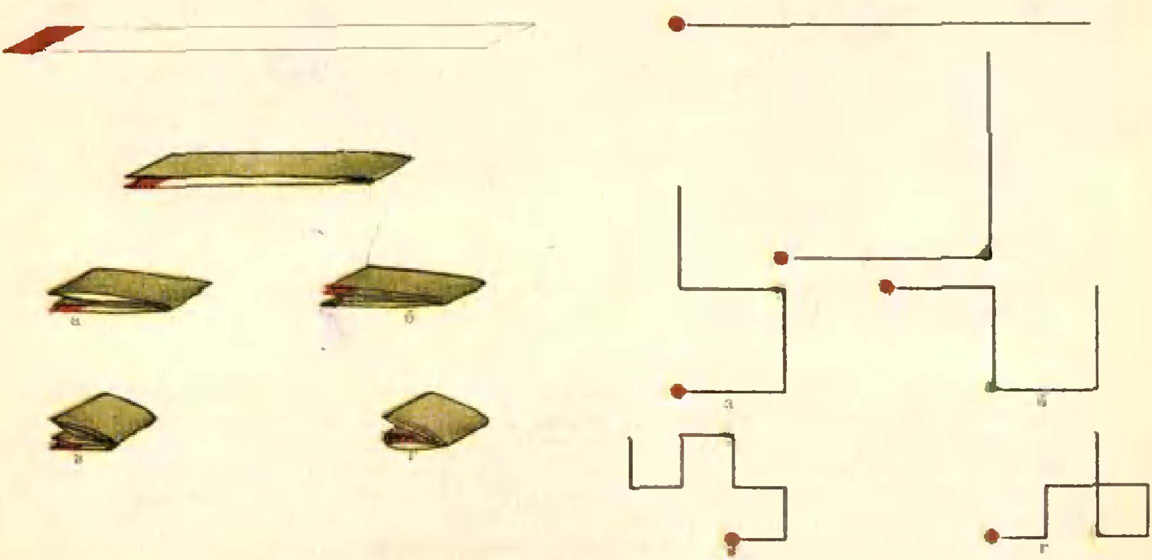


Рис. 2

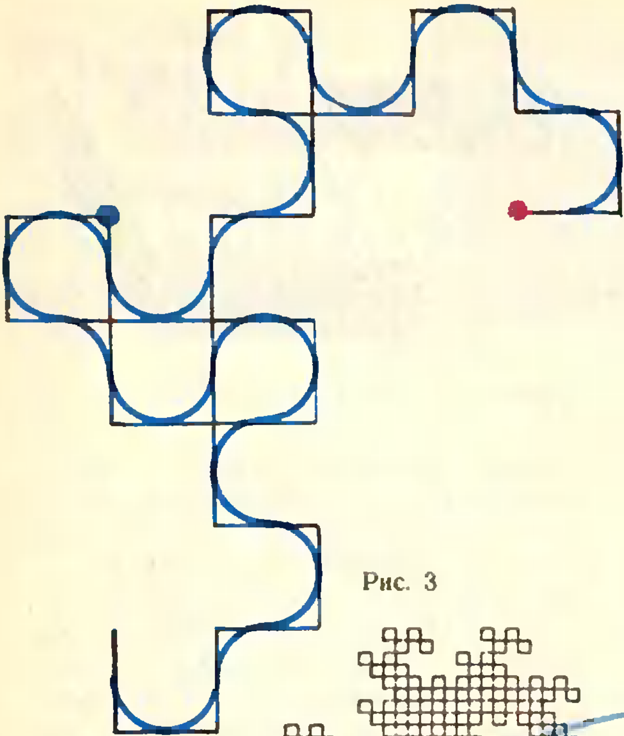
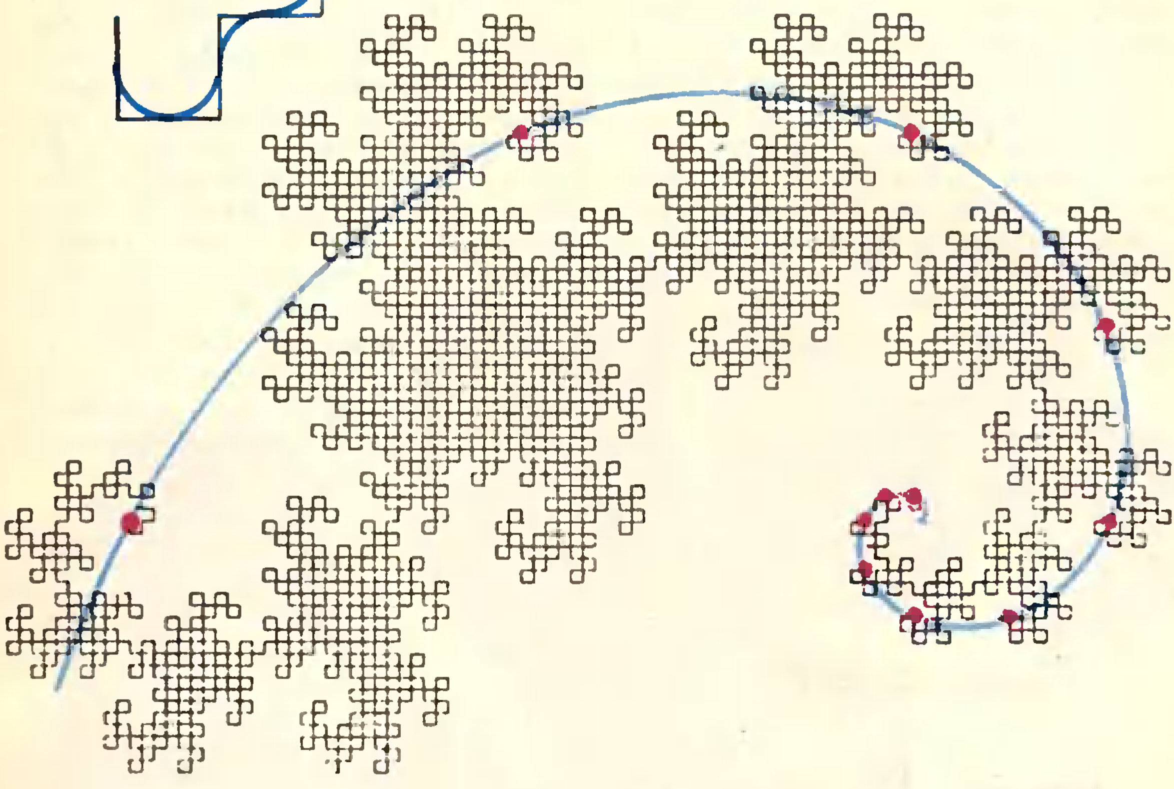


Рис. 3



Такая ломаная («Главная ломаная дракона») получается, если, начиная с отрезка, каждый раз поворачивать предыдущую ломаную в одну и ту же сторону. (Это соответствует способу складывания пополам, показанному на рис. 2 *а*, *в*; здесь полоска каждый раз загибается «справа вверх налево».) На рис. 3 изображено начало этой ломаной (32 звена), на этом рисунке — 4096 звеньев. Если ломаную продолжать таким же образом дальше, то она будет медленно обходить вокруг своего начала, делая один полный оборот за 8 «удвоений». Красные точки лежат на *логарифмической спирали* (для тех, кто знаком с полярной системой координат, мы можем написать ее уравнение: $\varphi=\log_a r$, где r, φ — полярные координаты; $a=a^{2:\pi}$).

КАК РИСОВАТЬ ДЛИННЫЕ ЛОМАНЫЕ ДРАКОНА?

Мы будем называть любую ломаную, полученную из бумажки, сложенной пополам n раз, разворачиванием сгибов до 90°, *ломаной дракона ранга n*. Выясним, как устроены ломаные дракона и как их рисовать для достаточно больших n.

Первый способ

Ломаная дракона ранга n состоит из 2^n звеньев и соответственно имеет 2^n-1 вершин (не считая концов). Таким образом, у нее есть средняя вершина (при $n>0$), поскольку число вершин нечетно. На рис. 2 и 3 у каждой ломаной средняя вершина отмечена зеленым кружочком. Можно подметить, что каждая из этих ломаных состоит из двух одинаковых кусков, получающихся друг из друга поворотом на 90°. Оказывается, это общая закономерность.

Теорема 1. *Если продолжить любую ломаную дракона ранга n с концом в точке O точно такой же ломаной, полученной из данной поворотом на 90° вокруг точки O, то получится ломаная дракона ранга n+1, и обратно, любая ломаная дракона ранга n+1 получается из некоторой ломаной ранга n этим способом.*

В самом деле, допустим, мы хотим сложить полоску $n+1$ раз пополам. Сложим ее сначала один раз пополам. Тогда две ее половинки совпадут и при дальнейших складываниях будут сгибаться пополам совершенно одинаково (рис. 4). Теперь развернем на 90° последние n сгибов полоски. Получим две совпадающие ломаные дракона ранга n; остается развести их на 90° — и мы получим ломаную дракона ранга $n+1$ (рис. 5). Подумайте, как из этих соображений вывести оба утверждения теоремы 1.

Пользуясь теоремой 1, легко рисовать длинные ломаные дракона.

Поскольку любая ломаная дракона идет по линиям квадратной сетки, ее удобно рисовать на клетчатой бумаге.

Возьмем любую короткую ломаную дракона (например, просто отрезок). Условимся, что одна из ее крайних точек — начало, а другая — конец. Продолжим ее такой же ломаной, повернутой относительно ее конца на 90° по (или против) часовой стрелке. Полученную новую ломаную таким же способом продолжаем от конца; так проделываем столько раз, сколько захочется и сколько сможем. Это автоматически и быстро можно делать, если под рукой есть калька или, еще лучше, слегка прозрачная клетчатая бумага. (Подумайте, как!)

Очевидно, точно так же мы можем сразу рисовать и кривые дракона: нужно только каждый раз закруглять средний сгиб.

Замечательное свойство всех кривых дракона заключается в том, что *они сами себя не пересекают*, или, что то же самое, *ломаные дракона никогда не проходят по одному и тому же отрезку дважды*. Таким образом, хотя ломаная дракона может дважды проходить через одну и ту же точку (вершину сетки), но более двух раз она в одну и ту же точку не попадает.

Рис. 5

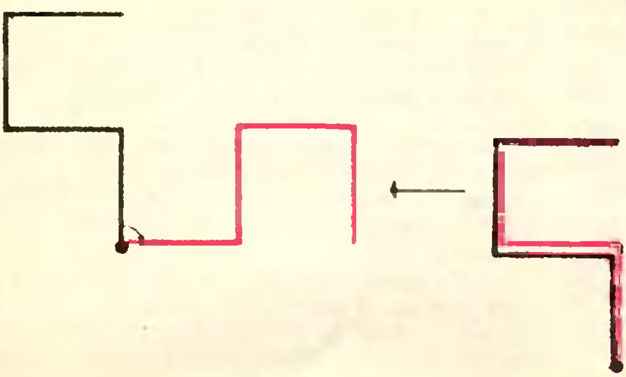
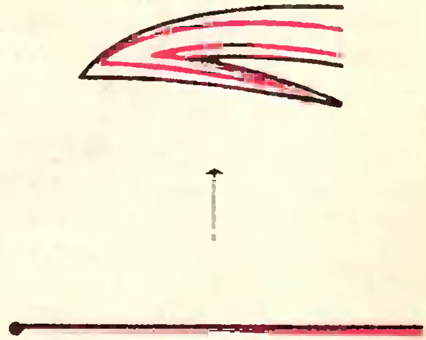


Рис. 4



Из теоремы 1 сразу не видно, как доказать, что ломаные дракона не проходят дважды по одному и тому же отрезку — наоборот, чем более длинные и запутанные ломаные или кривые рисуешь, тем более удивительно, как удачно их «выступы» и «впадины» подходят друг к другу (см. кривую дракона «паровоз» на стр. 43).

Однако нетрудно это доказать *), используя другую теорему об «удвоении» ломаных дракона, которая, кстати, дает еще один способ рисовать длинные ломаные.

Второй способ

На рис. 6 вершины черных ломаных дракона соединены красными отрезками через одну. Мы видим, что красные отрезки снова составляют ломаные дракона. Оказывается, это тоже общая закономерность.

Чтобы точно ее сформулировать, заметим еще, что каждый красный

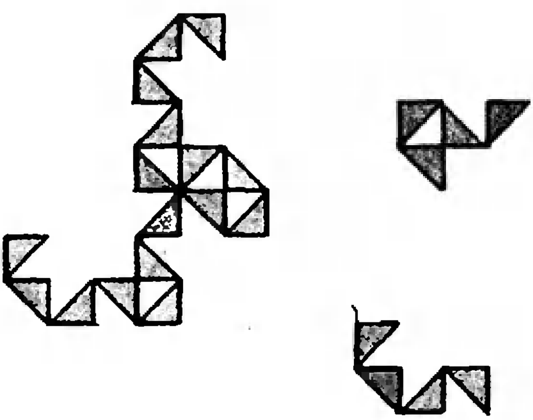


Рис. 6

отрезок является гипотенузой равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого — звенья исходной ломаной (на рисунке треугольники слегка закрашены), причем каждые два соседних таких треугольника получаются друг из друга поворотом на 90° вокруг их общей вершины; другими словами, если идти вдоль красной ломаной дракона, то эти треугольники будут встречаться поочередно то справа, то слева.

Теорема 2. *Если на каждом звене ломаной дракона ранга n, как на гипотенузе, построить прямоугольный равнобедренный треугольник, причем так, чтобы для двух соседних звеньев эти треугольники получались один из другого поворотом на 90° относительно общей вершины, то катеты построенных треугольников составляют ломаную дракона ранга $n+1$. И наоборот, каждую ломаную ранга $n+1$ можно получить этим способом из некоторой ломаной ранга n.*

В самом деле, проследим за последним складыванием полоски пополам. Для удобства мы будем ссылаться на условный рис. 7. Мы хотим сложить полоску пополам $n+1$ раз. Сложим ее сначала n раз и посмотрим на нее в профиль (красная линия на рис. 7). Затем сложим ее еще раз пополам и развернем этот последний сгиб на 90° (черная линия на том же рисунке*). Теперь бумажка идет от сгибов A к сгибам B и обратно не по гипотенузе, а по катетам равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Развернем теперь все остальные сгибы

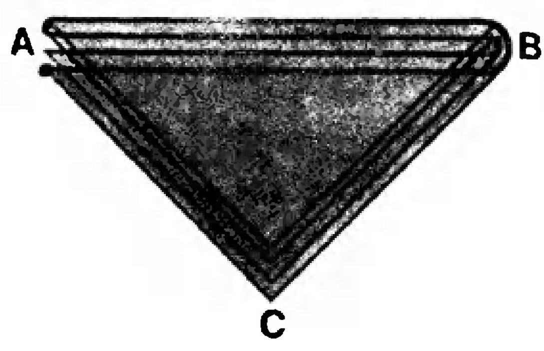


Рис. 7

до 90° (на рис. 8 показано, как разворачивается отдельный сгиб). Тогда катеты прямоугольных треугольников образуют ломаную дракона ранга $n+1$, а гипотенузы — ранга n.

Пользуясь этими соображениями, легко доказать оба утверждения теоремы 2. Вы можете попробовать дать другое доказательство: вывести теорему 2 из теоремы 1.

*) См. задачу 9 в конце статьи.

*) На нашем рисунке черная линия в $\sqrt{2}$ раз длиннее красной, но это не имеет значения, поскольку нас интересует форма ломаной, а не ее размеры.

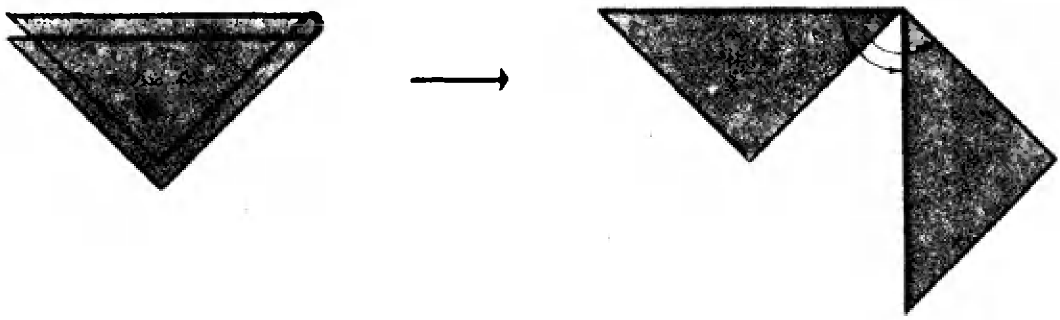


Рис. 8

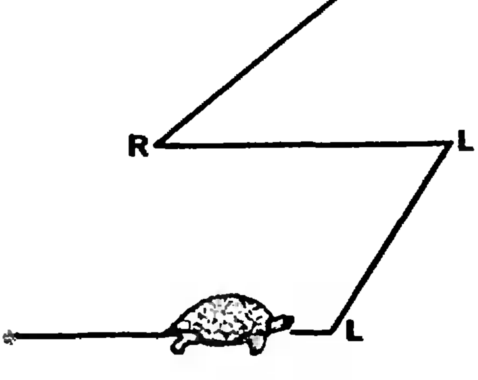
С помощью теоремы 2 из каждой ломаной дракона ранга n можно получить две разные ломаные ранга $n+1$: все зависит от того, по какую сторону от первого звена достроить треугольник.

Обратите внимание на то, что когда мы переходим от ломаной ранга n к ломаной ранга $n+1$ по теореме 1, то ломаная получается вдвое длиннее, а длина каждого звена не меняется; если же мы пользуемся для «удвоения» теоремой 2, то длина ломаной увеличивается в $\sqrt{2}$ раз, а длина звена уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

Потренируйтесь теперь в рисовании ломаных дракона с помощью теоремы 2.

СЛОВА

Свойство, о котором идет речь в теореме 2, можно объяснить совсем просто, если посмотреть на ломаные дракона (или, если угодно, на способы складывания бумажки) несколько с иной точки зрения.



Пусть по ломаной дракона ползет черепаха (рис. 9). Каждый раз, когда она доползает до вершины, ей приходится поворачивать на 90° налево или направо. С точки зрения черепахи, ее путь будет определяться последовательностью поворотов. Например, для ломаной на рис. 2, *а* (начало в красной точке) эта последовательность будет выглядеть так: налево, налево, направо.

Будем поворот направо обозначать буквой R, поворот налево — буквой L*). Тогда вся ломаная запишется таким «словом»:

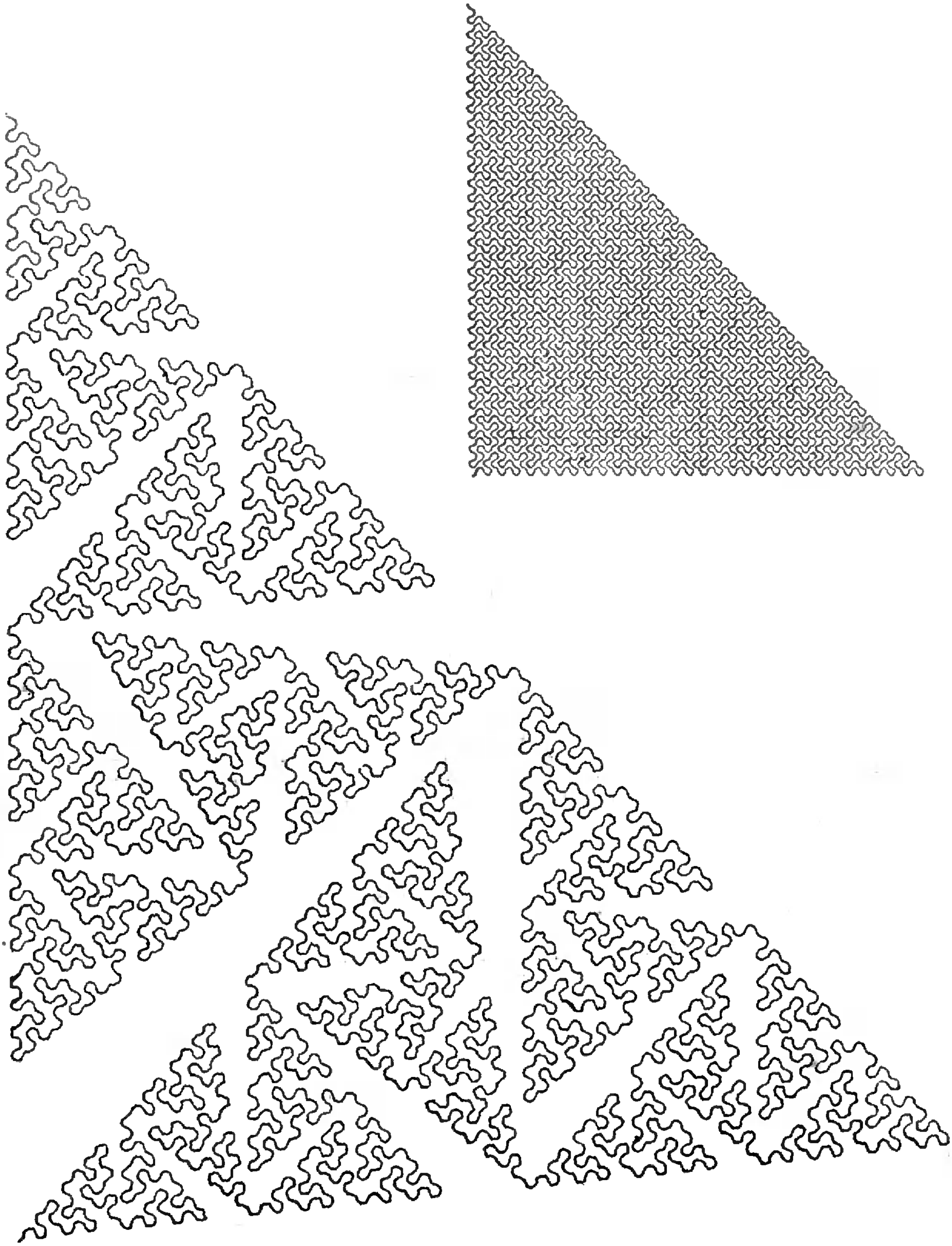
$$LLR$$

(«словом» во многих разделах математики и логики называют просто любую последовательность букв). Точно так же можно записать словом из букв L и R любую ломаную дракона.

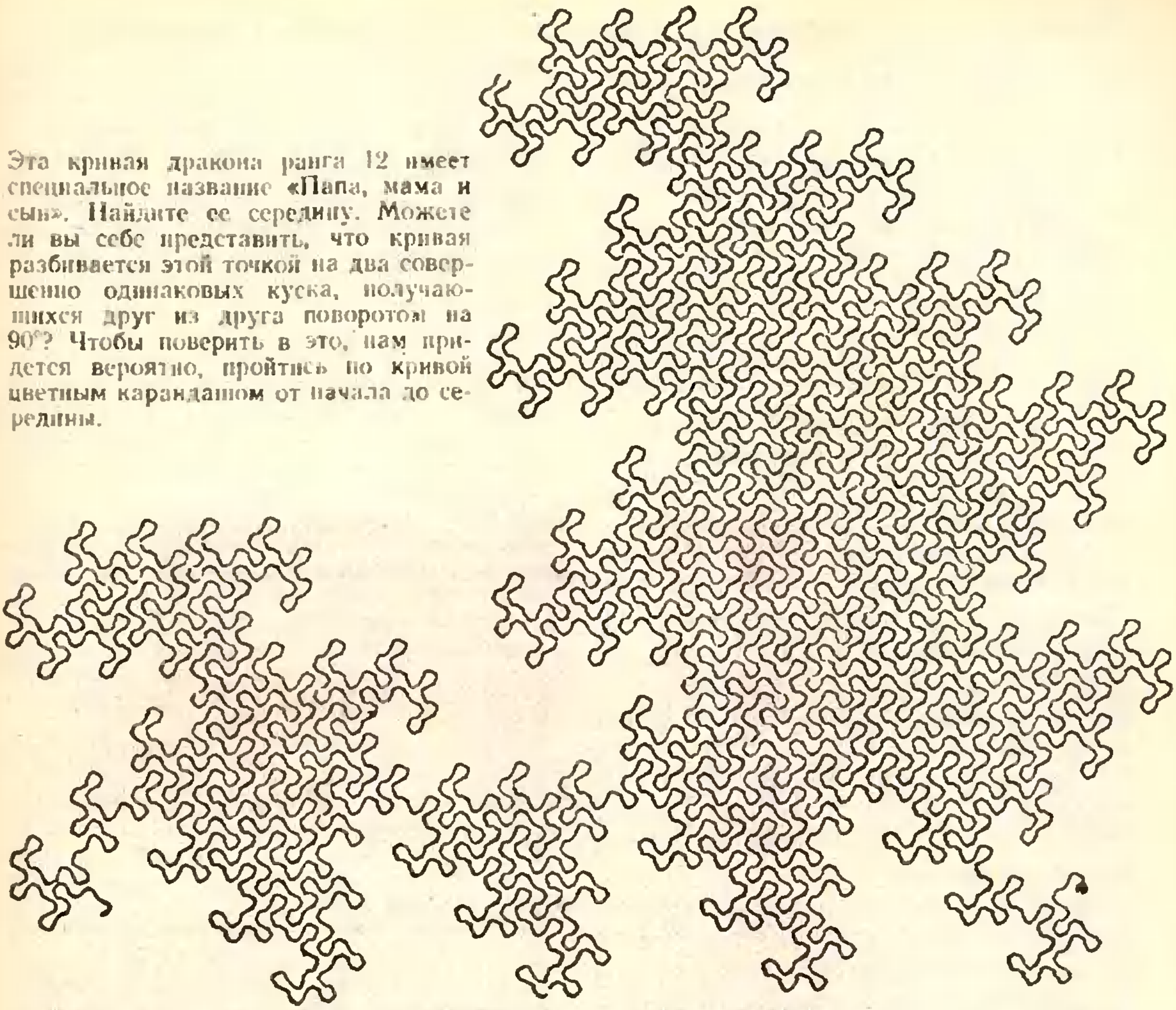
Чтобы получить из ломаной *а* ломаную *б* (рис. 2), нужно бумажку сложить еще один раз «налево» (см. рис. 2, *б* и 10). При этом между каждыми двумя вершинами ломаной *а* возникнет еще по одному повороту, причем на рис. 10 хорошо видно, что эти новые повороты будут чере-

*) Мы выбрали первые буквы английских слов right (правый) и left (левый), потому что русские буквы П и Л слишком похожи друг на друга (кстати, немецкие rechts и links начинаются с тех же букв).

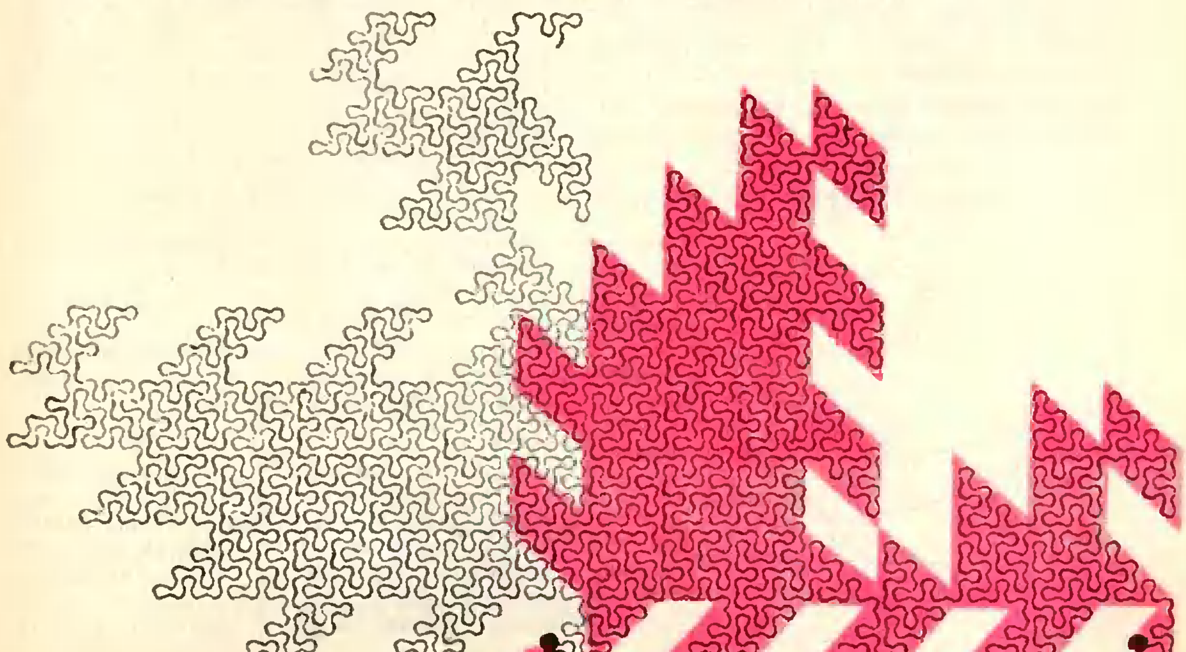
Эта кривая получается, если, начиная с отрезка, повторять процесс «удвоения» 12 раз, причем чередовать повороты по и против часовой стрелки. Чтобы лучше показать, как идет эта кривая, мы поворачиваем каждый раз не на 90°, а на 95° (черная линия); если уменьшить углы до 90°, то получится кривая дракона, которая изображена на том же рисунке цветной линией; она заполняет равномерным узором равнобедренный прямоугольный треугольник.



Эта кривая дракона ранга 12 имеет специальное название «Папа, мама и сын». Найдите ее середину. Можете ли вы себе представить, что кривая разбивается этой точкой на два совершенно одинаковых куска, получающихся друг из друга поворотом на 90°? Чтобы поверить в это, нам придется вероятно, пройтись по кривой цветным карандашом от начала до середины.



Здесь одна из двух половин, кривой («она называется «паровоз») нарисована на цветном фоне, чтобы показать, как эти две кривые «сцепляются» между собой. Одна половина после поворота ее вокруг средней точки на 90°, совпадет с другой



доваться; таким образом, получим

$$\begin{matrix} & L & & L & & R & \\ L & & R & & L & & R \end{matrix} \rightarrow LLRLLRR,$$

т. е. слово, являющееся записью ломаной *б*. При еще одном сгибе налево мы получили бы ломаную, характеризуемую словом

$$\begin{matrix} & L & & L & & R & & L & & L & & R & & R & \\ L & & R & & L & & R & & L & & R & & L & & R \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow LLRLLRRLLLRRLRR.$$

Начертите эту ломаную. Это — Главная ломаная дракона ранга 4. Если хотите, закруглите у нее углы, как это предложил Хейвей.

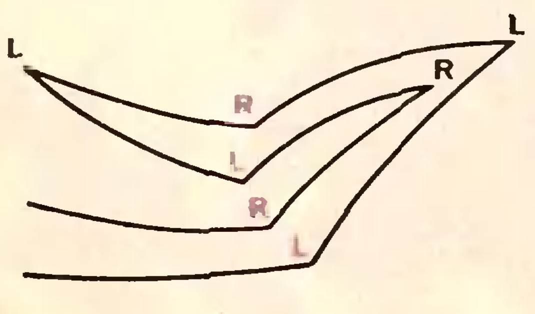
Если вы проделаете над последним полученным словом ту же операцию еще раз (снова начав последовательность чередующихся букв с L), то получите слово из 31 буквы — запись Главной ломаной дракона ранга 5, изображенной на рис. 3.

Разумеется, последовательность чередующихся букв можно начинать не с L, а с R — при этом получатся другие ломаные.

Легко видеть, что наш способ изготовления слова для ломаной ранга $n+1$ из слова для ломаной ранга n в точности соответствует геометрическому способу удвоения, о котором идет речь в теореме 2 (новым буквам соответствуют достраиваемые треугольники). Вообще всю «теорию» ломаных дракона можно было бы строить не геометрически — с помощью поворотов, достраивания треугольников и т. п., а «алгебраически»— с помощью операций над словами из двух букв L и R, «записями» ломаных дракона *).

Читатель сможет частично проделать этот путь и познакомиться с целым рядом интересных закономерностей, которыми обладают слова — записи кривых дракона, решая нижеследующие задачи.

Рис. 10



ЗАДАЧИ

1. Какой длины надо взять полоску, чтобы, сложив ее пополам 30 раз, получить расстояние между соседними сгибами равным 1 *см*? Больше или меньше расстояния от Земли до Луны?

2. Как изменится ломаная дракона, если полоску бумаги положить на стол другим ребром? Как изменится при этом слово, записывающее ломаную?

3. а) Сколько существует различных (не подобных друг другу) ломаных дракона ранга 4? Нарисуйте их все. Напишите соответствующие им слова из букв L и R.

б) Сколько существует различных ломаных ранга n?

4. Допустим, что черепаха проползла по ломаной дракона и прочла слово из букв L и R. Какое слово она прочтет, если проползет по этой ломаной в обратном направлении?

5. Пусть s — некоторое слово из букв L и R. Обозначим через $\bar{s}$ слово, которое получится из s, если переставить в нем буквы в обратном порядке и потом поменять L на R и R на L. (Например, если $s=LLR$, то $\bar{s}=LRR$).

Пусть s и t — некоторые слова из букв L и R. Будем обозначать через st слово, получающееся, если слова s и t написать рядом. (Например, если $s=LLR$, $t=RL$, то $st=LLRRL$).

Докажите, что:

а) Для любых слов s и t

$$\overline{st}=\bar{t}\,\bar{s}.$$

б) Если s_{n+1} — слово, соответствующее ломаной дракона ранга $n+1$, то

$$s_{n+1}=s_n x \bar{s}_n,$$

где s_n — некоторое слово, соответствующее ломаной дракона ранга n, а x — слово, состоящее из одной буквы.

---

*) Именно такой способ изложения избрали канадские математики Кнут и Дэвис, по рукописи которых «Number represantations and dragon curves» (Ch. Davis, D. E. Knuth) авторы статьи впервые познакомились с кривыми дракона. Из этой рукописи заимствован и ряд рисунков длинных кривых дракона.

в) Если s_n — слово, соответствующее ломаной дракона, то s_n отличается от $\overline{s_n}$ только одной средней буквой.

г) Слово, записывающее ломаную дракона ранга n, можно и притом единственным образом построить, если задать произвольно n букв, которые должны стоять в этом слове на местах с номерами 2^k, где $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$ (т. е. на первом, втором, четвертом, восьмом,..., 2^{n-1}-м местах); после этого, чтобы найти, какая буква стоит на m-м месте, нужно представить m в виде $m=2^k(2l+1)$, где k и l целые; если l четно, то на m-м месте стоит та же буква, что и на 2^k-м, если l нечетно — противоположная.

д) Два слова s_n' и s_n'' задают одинаковые по форме (подобные) ломаные дракона в том и только в том случае, если после вычеркивания средней буквы эти слова либо совпадают, либо одно получается из другого заменой L на R и R на L. (Например, слова *LLRLLRR*, *LLRRLRR*, *RRLRRLL*, *RRLLRLL* задают одинаковые ломаные.)

6. Пусть мы имеем ломаную дракона ранга n. Из нее можно получить две ломаные дракона ранга $n+1$, пользуясь либо теоремой 1 (принимая за точку O тот или другой конец ломаной), либо теоремой 2 (достраивая треугольники в ту или другую сторону). Будут ли в обоих случаях получаться те же самые две ломаные дракона ранга $n+1$ или, вообще говоря, другие? Как получать их слова из слова данной ломаной ранга n?

7. На плоскости даны две точки A и B. Начертим квадрат с центром в середине отрезка AB, одна из сторон которого равна $2AB$ и параллельна отрезку AB. Докажите, что любая ломаная дракона с концами в точках A и B лежит внутри этого квадрата. Докажите, что для любой точки M внутри этого квадрата и любого положительного числа ε можно найти такую ломаную дракона с концами A и B, которая проходит от точки M на расстоянии меньше ε (говоря математическим языком, «объединение всех ломаных дракона с концами в точках A и B всюду плотно в этом квадрате»).

8. Пусть черепаха ползет по плоскости из точки A с постоянной скоростью — вначале по направлению AB, а затем через каждые 15 минут поворачивает на 90°. Доказать, что вернуться в A черепаха может лишь через целое число часов и лишь по направлению, перпендикулярному к AB.

9. Докажите, что ломаная дракона никогда не проходит по одному и тому же отрезку более одного раза.

10. Докажите, что если ломаную дракона повернуть вокруг ее начала 0 на 90°, 180°, 270°, то из полученных четырех ломаных (включая исходную) никакие две не имеют общего отрезка.

11. Рассмотрим множество ломаных λ, обладающих такими свойствами: «λ имеет 2^n звеньев равной длины, и если ее разбить на k кусков по 2^{n-k} звеньев в каждом куске, то два соседних куска получаются один из другого поворотом вокруг общей вершины на 90° (для любого k)». Доказать, что это множество ломаных в точности совпадает со множеством ломаных дракона ранга n.

12. Введем на клетчатой бумаге систему координат, направив оси по линиям сетки и взяв за единицу масштаба сторону клетки. Будем рисовать Главную ломаную дракона так, чтобы первыми тремя ее вершинами были точки (0, 0), (0,1), (1,1) (см. рисунок на стр. 38).

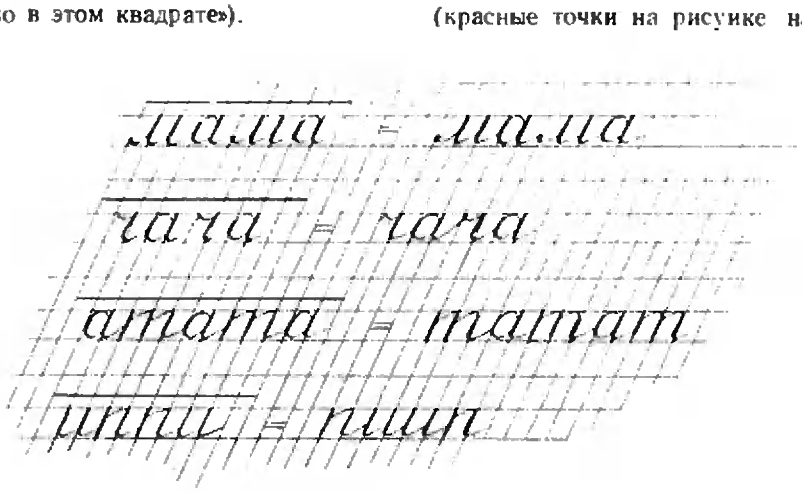
Пользуясь теоремой 1, можно продолжать эту ломаную сколько угодно раз: мы будем получать последовательно ломаные ранга 1, 2, 3, 4, 5,... Можно представить себе, что мы нарисовали их в с е и получили *бесконечную ломаную дракона* («Главную ломаную дракона ранга ∞»). Ее первые 2^n звеньев образуют ломаную ранга n.

Докажите, что:

а) Конец такой ломаной ранга n будет находиться в точке

$$\left(2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4},\ \ 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi n}{4}\right)$$

(красные точки на рисунке на стр. 38).



б) Слово, являющееся записью этой ломаной, можно быстро написать так. Сначала записываем чередующиеся буквы L и R, оставляя между ними промежутки для пропущенных букв:

$$L\_R\_L\_R\_L\_R\_L\_R\_L\_R\ldots,$$

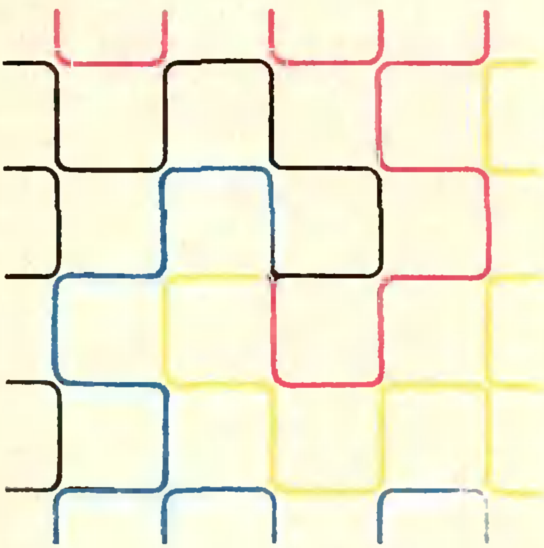
а затем поступаем следующим образом. Пальцем левой руки укажем на первую букву, а правой рукой запишем ее в первый промежуток, затем левой рукой укажем на вторую букву, а правой вставим ее во второй промежуток, левой на третью... и так последовательно по всем буквам (не пропуская вновь вставленных), а правой вносим каждую указанную букву в первый свободный промежуток

$$LLRLLRRLLLRRLRRLLLRL\ldots$$

в) Если, как в задаче **10**, выпустить из одной точки четыре главных ломаных дракона ранга∞, то по каждому отрезку сетки пройдет ровно одно звено одной из этих ломаных (рис. 11).

(Это — трудная теорема; ее впервые доказал D. E. Knuth.)

Рис. 11.



ЛИТЕРАТУРА

M. Gardner, Mathematical games, Scientific American 216, 1967 г., март (124—125), апрель (118—120), июль (115).

Накануне олимпиады

Для тех, кто примет участие в заключительном туре Всесоюзной олимпиады школьников, апрель окажется «жарким». Именно в этом месяце будут соревноваться: юные математики — в Симферополе (с 23 по 29), физики — Свердловске, химики — Воронеже (с 8 по 15). Сюда приедут по четыре представителя каждой из областных, краевых и республиканских олимпиад, восемь москвичей, шесть ленинградцев, ребята, занявшие первые и вторые места на предыдущей олимпиаде, и по четыре посланца от специальных физико-математических интернатов.

Уже на следующий день после торжественного открытия олимпиады начнется ее деловая часть — все участники засядут за письменные работы по своей «специальности». Им предстоит решить по 4—5 задач. Физиков и химиков, кроме того, 12-го апреля ожидает экспериментальный тур.

Самый приятный и легкий день — закрытия олимпиады и вручения наград.

Тринадцать учеников выпускного класса — восемь математиков и пять физиков, успешно выступившие на Всесоюзной олимпиаде, получат путевки на очередную международную олимпиаду летом этого года.

Журнал «Квант» будет постоянно информировать своих читателей обо всем, что происходит на этих соревнованиях.

ЗАДАЧНИК „КВАНТА”

В этом разделе, продолжающемся из номера в номер, мы помещаем несколько задач, как правило, довольно трудных. Лучшие из решений этих задач, присланных читателями, будут опубликованы в журнале через несколько месяцев.

По математике

М6. Перед вами часы. Сколько существует положений стрелок, по которым нельзя определить время, если не знать, какая стрелка часовая, а какая — минутная?

(Считается, что положение каждой из стрелок можно определить точно, но следить за тем, как стрелки двигаются, нельзя.)

М7. a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3.$$

С. Берколайко

М8. Двое играют в такую игру. Из кучки, где имеется 25 спичек, каждый берет себе по очереди одну, две или три спички. Выигрывает тот, у кого в конце игры — после того, как все спички будут разобраны, — окажется четное число спичек.

Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер? Как он должен играть, чтобы выиграть? Как изменится ответ, если считать, что выигрывает забравший нечетное число спичек?

Исследуйте эту игру в общем случае, когда спичек $2n+1$ и разрешается брать любое число спичек от 1 до m.

М9. Рассмотрим следующие свойства тетраэдра (тетраэдром мы называем произвольную треугольную пирамиду):

а) все грани равновелики;

б) каждое ребро равно противоположному;

в) все грани равны;

г) центры описанной и вписанной сфер совпадают;

д) суммы плоских углов при каждой вершине тетраэдра равны.

Докажите, что все эти свойства эквивалентны.

Постарайтесь найти другие эквивалентные им свойства тетраэдра.

М10. Четыре круга, центры которых являются вершинами выпуклого четырехугольника, целиком покрывают этот четырехугольник. Доказать, что из них можно выбрать три круга, которые покрывают треугольник с вершинами в центрах этих кругов.

Г. Гальперин

Ф7. Горизонтальный стержень O_1A длиной l вращается вокруг вертикальной оси O_1 (см. рис. 1). На ось, прикрепленную к концу стержня O_1A, насажено колесо радиуса r. Ось колеса горизонтальна и составляет угол α со стержнем O_1A. Колесо вращается на оси без трения и катится по земле. Трение между колесом и почвой большое. Сколько оборотов сделает колесо, когда стержень O_1A сделает один оборот вокруг вертикальной оси?

Г. Коткин

Ф8. Длинный стержень AB с резьбовым отверстием на конце накручен на вертикальный винт (см. рис. 2). Стержень отпускают. Трение между винтом и стержнем пренебрежимо мало. Как будет двигаться стержень после того, как он слетит с винта?

Физико-математическая олимпиада МИЭМ

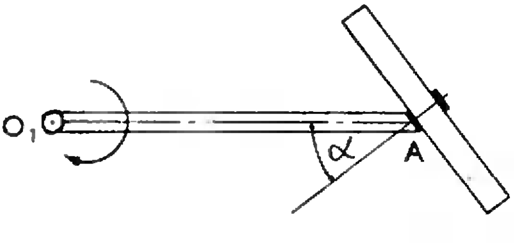


Рис. 1

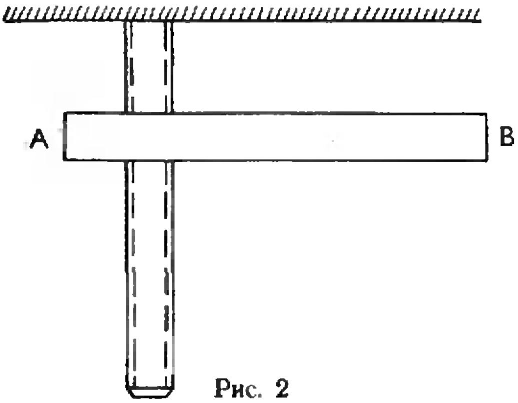


Рис. 2

Ф9. На горизонтальном столе находится грузик, прикрепленный к столу при помощи длинной пружины. Сначала пружина была не растянута. Затем грузик сдвинули на 20 *см* от положения равновесия и отпустили. Грузик начал колебаться вдоль пружины. За счет трения амплитуда его колебаний за период уменьшается на 7%. Сколько всего колебаний совершит грузик до остановки? На каком расстоянии от положения равновесия он остановится?

Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада 1967 года

Ф10. Как из четырех тонких проволочных спиралей с сопротивлениями 10 *ом*, 20 *ом*, 30 *ом* и 40 *ом*, рассчитанных на выделение мощности не более 2 *вт* на каждой, составить нагреватель наибольшей возможной мощности, если имеется источник тока с э. д. с. 20 *в* и внутренним сопротивлением 20 *ом*? *Б. Буховцев*

Ф11. Три открытые бочки наполнены водой и установлены на разной высоте (см. рис. 3). Из каждой бочки проведены вверх трубки, соединяющиеся вместе. Трубки тоже заполнены водой. Куда будет перетекать вода по трубкам, если одновременно открыть краны K_1, K_2 и K_3?

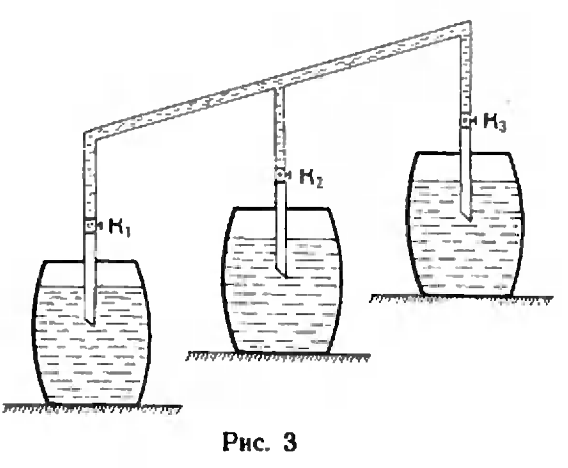


Рис. 3

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Многих юношей и девушек волнуют вопросы,связанные с приемными экзаменами, особенно по математике и физике. Ведь эти экзамены проводятся во все технические вузы, на многие (в том числе и гуманитарные!) факультеты университетов и педагогических институтов. Что ожидает поступающего на вступительных экзаменах? Как они проводятся? Как лучше к ним подготовиться? Все это несомненно, интересует читателей «Кванта».

Мы будем на страницах журнала регулярно помещать «Практикум абитуриента» — информацию о материалах приемных экзаменов по математике и физике, проводить консультации по отдельным темам, обычно вызывающим затруднения, рассказывать о книгах, специально адресованных поступающим в вузы.

В этом номере будет информация о письменных экзаменах по математике. Как правило, на этих экзаменах проверяется прежде всего умение решать задачи с помощью приемов, изучаемых в школе. Предлагаемые на экзаменах задачи не требуют знаний, выходящих за рамки «Программы вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР».

К поступающим на математические, физические и некоторые другие факультеты университетов, естественно, предъявляются более высокие требования, чем к поступающим в большинство втузов. Это, однако, не значит, что, например, от будущих физиков требуются какие-то дополнительные знания, выходящие за пределы программы. Просто они должны свободнее владеть материалом, проявить определенную самостоятельность мысли, должны уметь решать более сложные задачи.

Чтобы научиться уверенно решать задачи вступительных экзаменов, надо внимательно повторить теоретический школьный курс и получить достаточную практику в решении подобных задач, пользуясь каким-либо из распространенных сборников задач по математике, составленных специально для поступающих в вузы.

Начинайте готовиться к вступительным экзаменам не откладывая, особенно, если вы собираетесь сдавать экзамены уже через полгода!

Редакция.

О ПИСЬМЕННОМ ЭКЗАМЕНЕ НА МЕХМАТЕ МГУ В 1969 ГОДУ

Н. С. БАХВАЛОВ, Н. Н. КУЗНЕЦОВ

Письменный экзамен по математике является основным экзаменом для поступающих на механико-математический факультет МГУ. Часто приходится слышать о его чрезмерной трудности, о том, что получить даже «тройку» на этом экзамене могут только выпускники московских математических школ.

Эти слухи совершенно неосновательны *). Задания (так называемые «варианты», состоящие из 4 задач), предлагаемые на письменном экзамене, составляются так, чтобы в каждом варианте одна-две задачи были вполне доступны тому, кто обладает средней математической подготовкой. Решение таких задач уже гарантирует тройку. Поэтому для успешной сдачи письменного экзамена нужно лишь твердое знание школьной программы по математике, а неудовлетворительную оценку получают только те абитуриенты, которые не показали подготовки, достаточной для успешного обучения на факультете.

Конечно, наряду с нетрудными задачами, в вариант включаются и задачи, решение которых требует достаточной математической культуры (но не дополнительных знаний, выходящих за рамки программы). Поэтому высокую оценку на этом экзамене получить действительно нелегко. Для

*) В 1969 году из 922 поступавших москвичей получило на письменном экзамене положительную оценку (тройку и выше) 469 (около 50%), и из 2356 иногородних — 912 человек (около 40%).

Вариант 1

1. Пункты A и B находятся на дорогах, пересекающихся под углом $ACB=60°$. Из пункта A в B можно доехать на автобусе — сначала по одной дороге до перекрестка C, потом по другой, — затратив 11 мин. Если пойти из A в B пешком напрямик, то это займет 1 час. 10 мин., а если сначала дойти кратчайшим путем до дороги, на которой стоит пункт B, а затем подъехать на автобусе, — то еще больше времени, даже если на автобус сесть сразу.

Каково расстояние от пункта A до перекрестка, если скорость пешехода равна 3 *км/час*, а скорость автобуса — 30 *км/час*? (Дороги считать прямыми.)

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке O. Известно, что отрезок OE имеет длину 1, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки E, D, O. Найти стороны и углы треугольника EDO.

3. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\cos 13x = \cos x,$$
$$\cos 2x + \sin 5x = 1,$$
$$|x| < 3.$$

4. Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами 2. Найти периметр четырехугольника, зная, что одна из его сторон равна $\sqrt{5}$.

этого нужно специально подготовиться, пользуясь, соответствующей литературой *).

Здесь мы рассмотрим для примера один типичный набор задач в варианте, предлагавшемся на письменном экзамене на мехмат в 1969 году (вариант 1 на стр. 50). На его решение давалось 4 часа. Для получения оценки «3» было достаточно решить хотя бы одну задачу; оценка «5» выставлялась, если имелось полное решение любых трех задач, а четвертая была в основном решена.

Мы обстоятельно разберем эти задачи и отметим характерные ошибки, допущенные поступавшими при их решении, а в заключение предложим читателям «Кванта» еще один вариант для самостоятельного решения.

РАЗБОР ЗАДАЧ

Задача 1

Сделаем чертеж (рис. 1). D — ближайшая к A точка прямой BC. Заметим, что расположение точки B относительно D заранее неизвестно (на чертеже изображены два варианта ее расположения). Пусть $x=AC$, $y=CB$ (эти расстояния измерены в километрах). Записывая условия задачи, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} x+y=5{,}5 \\ x^2+y^2-xy=12{,}25 \end{cases} \qquad (1)$$

и неравенство:

$$10x\sqrt{3}+|2y-x|>70 \qquad (2)$$

*) В качестве подходящих задачников укажем, например, на книги Е. Б. Ваховского и А. А. Рывкина «Задачи по элементарной математике повышенной трудности» (о ней см. статью «Как решать задачу» на стр. 60 этого номера «Кванта»), Н. Х. Розова, М. К. Потапова, Г. В. Дорофеева, «Пособие по математике для поступающих в вузы», В. Б. Лидского, П. В. Овсянникова, А. Н. Тулайкова и М. И. Шабунина «Задачи по элементарной математике».

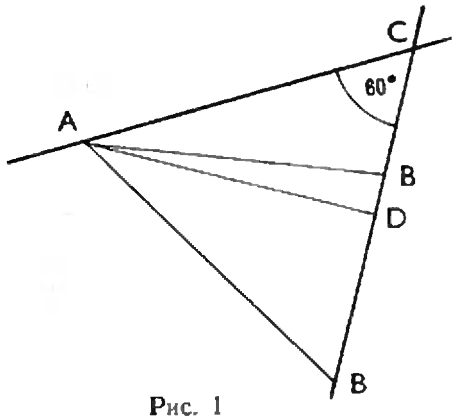


Рис. 1

Система уравнений (1) имеет два решения: а) $x=4$, $y=1{,}5$; б) $x=1{,}5$, $y=4$, и мы должны выбрать из них то, которое удовлетворяет дополнительному условию (2). Второе решение этому условию не удовлетворяет, ибо $15\sqrt{3}+6{,}5<30+6{,}5<70$. Первое же решение ему удовлетворяет. Чтобы убедиться в этом, нужно проверить, что $40\sqrt{3}+1>70$, или $40\sqrt{3}>69$. Возведя последнее неравенство в квадрат, получаем $4800>4781$ и тем самым убеждаемся, что оно верно. Итак, решением задачи является $x=4$ *км*.

Отметим типичные ошибки, которые допускали абитуриенты при решении этой задачи.

С составлением и решением системы уравнений (1) справилось большинство из них; однако, выбор нужного решения при помощи дополнительного условия (2) оказался для многих непреодолимым препятствием. Пожалуй, наибольшую долю ошибочных решений породило неверное наглядное представление о взаимном расположении точек B и D, в результате которого вместо неравенства (2) проверялось неправильное неравенство

$$10x\sqrt{3}+2y-x>70. \qquad (3)$$

При этом довольно часто экзаменующиеся ограничивались проверкой лишь одного из найденных решений. Например, установив, что неравенству (3) второе решение системы (1) ($x=1{,}5$; $y=4$) не удовлетворяет, они автоматически делали на этом основании вывод, что искомым является первое решение (хотя легко заметить, что неравенству (3) оно также не удовлетворяет). Отметим еще одну ошибку, которую допустила немалая часть поступавших: при проверке условия (2) значение $\sqrt{3}$ заменялось приближенным рациональным значением, например, 1,7, и проверялось неправильное равенство

$$17x+|2y-x|>70$$

(ему, как легко проверить, также не удовлетворяют оба решения системы уравнений (1)).

Задача 2

Соединим точки C и O (см. рис. 2). Прямая CO — биссектриса угла C, ибо она проходит через точку пересечения биссектрис AD и BE. Поэтому

$$\angle ECO = \angle DCO \qquad (1)$$

Вписанные в окружность $OECD$ углы

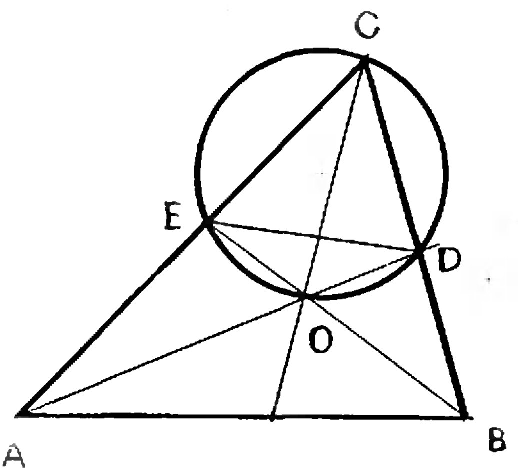


Рис. 2.

DEO и DCO равны, как опирающиеся на одну дугу. То же верно относительно углов EDO и ECO. На основании (1) заключаем, что

$$\angle DEO = \angle EDO,$$

т. е. треугольник EDO — равнобедренный.

Вписанные углы ECD и EOD опираются на дополнительные дуги; поэтому их сумма равна 180°. С другой стороны, имеем цепочку равенств:

$$\angle EOD = \angle AOB =$$
$$= 180° - (\angle OAB + \angle OBA) =$$
$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) =$$
$$= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle C) =$$
$$= 90° + \frac{1}{2}(\angle C).$$

Поэтому

$$180° - (\angle C) = 90° + \frac{1}{2}(\angle C),$$

откуда

$$\angle C = 60°.$$

Из рассуждений, приведенных выше, следует, что

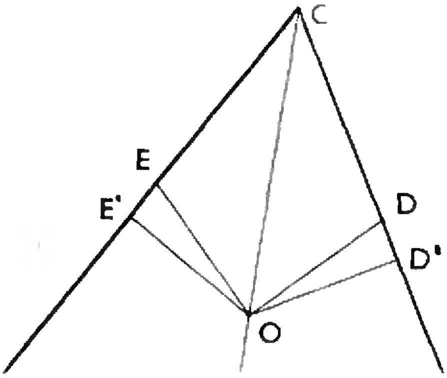
$$\angle DEO = \angle EDO = 30°,$$
$$\angle EOD = 120°,$$

так что стороны треугольника EDO равны 1, 1 и $\sqrt{3}$.

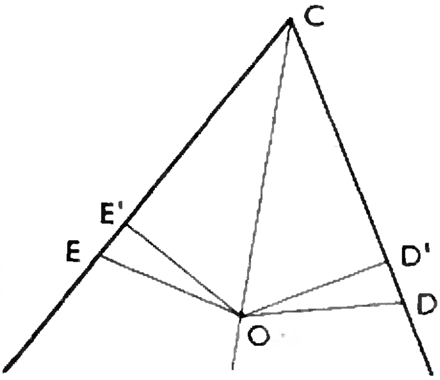
Наиболее типичной ошибкой в этой задаче было «доказательство» того, что $\triangle ABC$ — равносторонний. Часть экзаменующихся, основываясь на геометрической иллюзии, предполагала, что центр окружности $OECD$ лежит на прямой CO. Отсюда следовало, что углы OEC и ODC — прямые, так что биссектрисы AD и BE являются одновременно высотами, что возможно только в равностороннем треугольнике.

Другая часть экзаменующихся, доказывавших равносторонность треугольника ABC, основывалась на следующем рассуждении: опустим из точки O перпендикуляры OE' и OD' на стороны AC и BC соответственно. Рассмотрим два варианта расположения точек D' и E' относительно точек D и E (см. рис. 3). В случае а) углы CDO и CEO — тупые, а в случае б) они оба острые. Поэтому вокруг точек C, D, O, E можно описать окружность лишь тогда, когда точка E' совпадает с E, а D' — с D.

Отсюда следует заключение, что $AD \perp BC$ и $BE \perp AC$.



а



б

Рис. 3

Мы хотим предоставить читателям в качестве упражнения найти ошибку в приведенном выше рассуждении.

Следует заметить, что число экзаменующихся, правильно решивших эту задачу (и аналогичные задачи других вариантов) было сравнительно невелико: ее решил, примерно, 1 человек из 9.

Задача 3

Решение первого уравнения данной системы:

$$\cos x - \cos 13x = 0$$

или

$$2 \sin 7x \sin 6x = 0$$

дает две серии значений

а) $x = \frac{1}{7} n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$,

б) $x = \frac{1}{6} m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Отбирая из этих значений те, которые удовлетворяют неравенству $|x| < 3$, находим:

а) $x = \frac{1}{7} n\pi, \quad |n| \leqslant 6$,

б) $x = \frac{1}{6} m\pi, \quad |m| \leqslant 5$.

Теперь мы должны выбрать те значения x, которые удовлетворяют второму уравнению системы. Это уравнение можно представить в виде:

$$1 = \sin 5x + \cos 2x =$$

$$= \sin 5x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) =$$

$$= 2 \sin\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Подставим в него сначала серию (а). Поскольку $7x = n\pi$ ($|n| \leqslant 6$), то должно выполняться равенство:

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{3n\pi}{14} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Так как $\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos\left(\frac{3n\pi}{14} - \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ и, следовательно, $\frac{3n\pi}{14} - \frac{\pi}{4}$ должно отличаться от $\frac{\pi}{4}$ на число кратное $\frac{\pi}{2}$. Однако $\frac{3n\pi}{14} = \frac{3n}{7} \cdot \frac{\pi}{2}$, так что $\frac{3n}{7}$ должно быть целым. При ограничении $|n| \leqslant 6$ это имеет место лишь при $n = 0$. Подставляя значение $n = 0$ в уравнение (1), убеждаемся, что оно ему удовлетворяет. Итак, из серии (а) решением является только $x = 0$.

Проверим теперь серию (б). Представив второе уравнение данной системы в виде

$$\sin 5x = 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x, \quad (2)$$

замечаем, что $\sin 5x$ должен быть неотрицательным, то есть угол $5x = \frac{5}{6} m\pi$ ($|m| \leqslant 5$) заключен в первых двух четвертях. Подставляя в выражение $\frac{5}{6} m\pi$ возможные целые значения m от -5 до $+5$, устанавливаем, что проверке подлежат только шесть из них: $m=0$, 1, 3, 5; -2, -4. Вычисляя при этих значениях левую и правую части уравнения (2), получаем таблицу:

m	0	1	3	5	-2	-4
$\sin\frac{5m\pi}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$2\sin^2\frac{m\pi}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

из которой получаем искомые решения: $m=0$, 1, 5, т. е.

$$x=0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}. \qquad (3)$$

Три значения (3) и дают полное решение задачи, так как решение серии (а) давало значение $x=0$, уже включенное в (3).

Отметим, что таким же образом, путем перебора, можно проверить и серию (а).

При решении этой задачи характерной ошибкой было следующее: многие забывали, что решение должно удовлетворять всем условиям задачи одновременно, а зачастую просто не понимали этого. Некоторые ограничивались тем, что решали одно из уравнений и совершали отбор решений по неравенству, другие комбинировали уравнения и решали в конце концов также лишь одно уравнение, не эквивалентное предложенной системе.

Задача 4

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, $AB=\sqrt{5}$. Прямоугольные проекции любого многоугольника на параллельные плоскости равны между собой; поэтому проведем плоскости P_1 и P_2 параллельные исходным плоскостям, через вершину A и в дальнейшем будем говорить о проекциях четырехугольника именно на эти плоскости.

Для каждой точки M пространства мы будем обозначать через M_1, M_2 и M_3 проекции точки M соответственно на плоскость P_1, плоскость P_2 и прямую пересечения P_1 и P_2; очевидно, $MM_1=M_2M_3$ и $MM_2=M_1M_3$. По принятому построению плоскостей P_1 и P_2 все три проекции точки A (A_1, A_2 и A_3) совпадают с A; по условию задачи $AB_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ — квадраты со стороной 2.

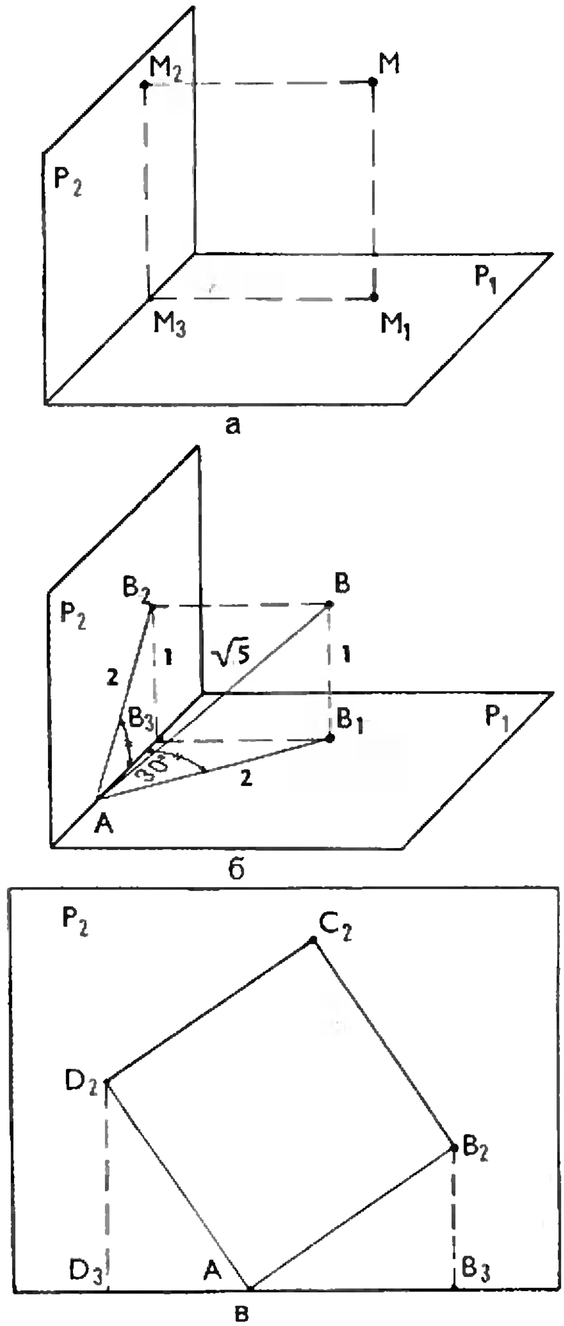


Рис. 4.

Так как $AB_1=2$, то из прямоугольного треугольника ABB_1 находим $BB_1=\sqrt{5-4}=1$. Поскольку в прямоугольном треугольнике AB_2B_3 гипотенуза AB_2 равна 2, а катет $B_2B_3=BB_1=1$, то $\angle B_2AB_3=30°$; следовательно, острый угол AD_2D_3, стороны которого перпендикулярны сторонам угла B_2AB_3 ($AB_2\perp AD_2$, $D_2D_3\perp AB_3$), тоже равен 30°; поэтому из прямоугольного треугольника AD_2D_3 находим, что

$$D_2D_3=D_2A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},$$

откуда

$$DD_1=D_2D_3=\sqrt{3}$$

и

$$AD=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}.$$

Прямые AB и DC_2 являются линиями пересечения параллельных плоскостей ABB_1 и DD_1C_1C с плоскостью данного четырехугольника $ABCD$; поэтому $AB\parallel DC$. Аналогично заключаем, что $BC\parallel AD$. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм, а поэтому его периметр равен

$$2(\sqrt{5}+\sqrt{7}).$$

Заметьте, что мы записали решение таким образом, что нам нигде для обоснования рассуждений не приходилось ссылаться на чертеж (хотя для того, чтобы разобраться в решении, полезно делать для себя рисунки вроде 4 а, б, в). Часто при решении подобных задач существенно опираются на чертеж, забывая проанализировать все возможные случаи взаимного расположения фигур.

Следует заметить, что при оценке задачи 4 на экзамене не требовался подробный анализ всех возможных расположений четырехугольника $ABCD$ относительно плоскостей P_1 и P_2. Задача считалась решенной правильно, если было рассмотрено хотя бы одно их них.

Эту задачу решили очень немногие; поэтому говорить о типичных ошибках в связи с этой задачей невозможно.

В заключение предлагаем читателям для упражнения еще один из вариантов письменного задания.

Вариант 2

1. В пунктах A и B от реки отходят два канала, пересекающиеся друг с другом под прямым углом. Катер идет от A до B по реке 1 час 15 мин., а по каналам 1 час 10 мин. Из пункта C на реке, находящегося между A и B, в полтора раза ближе к A, чем к B, до точки пересечения каналов можно доехать напрямик на автомобиле менее, чем за 13 мин.

Сколько времени катер идет от A до точки пересечения каналов, если скорость движения катера по реке на одну треть меньше, а скорость автомобиля вдвое больше, чем скорость движения катера по каналу? (Реку и каналы считать прямыми.)

2. В равнобедренном треугольнике KLM ($KL=KM$) проведены биссектрисы KN, LP, MQ. Известно, что вершина K лежит на окружности, проведенной через точки N, P, Q. Найти KM, если $KP=2$ *м*.

3. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$2\cos^2 9x=1+\cos 10x,$$

$$\cos 9x+\sin 5x=1,$$

$$|x|<5.$$

4. Прямоугольные проекции треугольника ABC на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Медиана AD треугольника ABC равна $\sqrt{\frac{9}{8}}$. Найти BC.

ЧТО МОЖНО ДОБАВИТЬ К НАЗВАНИЮ НАШЕГО ЖУРНАЛА?

(РЕПЛИКА МАТЕМАТИКА)

Из статьи «История кванта», напечатанной в первом номере журнала, читатель узнал о важном понятии современной физики и о происхождении самого термина «квант». Любопытно отметить, что тому же латинскому корню обязан своим рождением другой термин — *квантор*, на этот раз математический. Так что ответ на вопрос, поставленный в заглавии, у математика не вызывает затруднений.

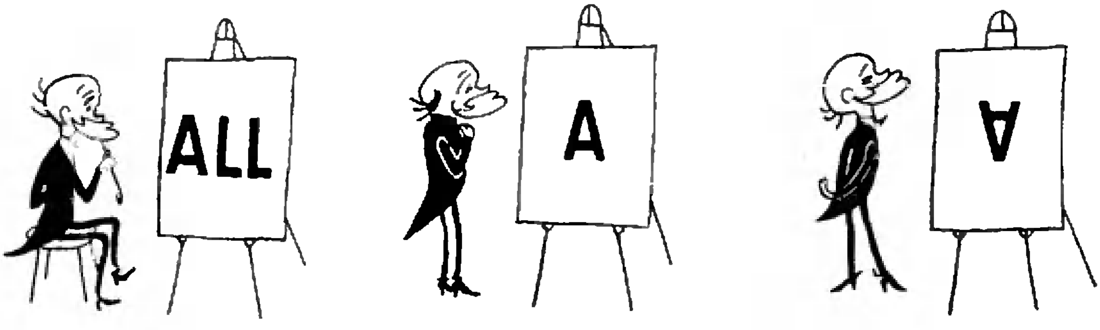


Рис. 1

Термин «квантор» принадлежит одной из важнейших отраслей современной математики — математической логике — и вошел в научный обиход примерно в то же время, что и «квант», т. е. в начале нашего столетия.

Попытаемся же вкратце пояснить значение этого термина и связанные с ним обозначения. Рассмотрим для примера такое равенство:

$$x^2 = 2^x \qquad (1)$$

и будем переменной x придавать в качестве значений всевозможные натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. При этом окажется, что для одних натуральных значений x равенство (1) будет верным (истинным), а для других — неверным (ложным). Так, ложно равенство $1^2=2^1$, а равенство $4^2=2^4$ истинно.

В связи с нашим исходным равенством уместно рассмотреть два утверждения: 1) данное равенство удовлетворяется в с е м и (л ю б ы м и) натуральными значениями x, 2) с у щ е с т в у ю т натуральные значения x, удовлетворяющие данному равенству. В приведенном примере утверждение 1) следует признать ложным, а утверждение 2) — истинным.

Утверждение 1) обозначают в математической логике так:

$$\forall x\ (x^2 = 2^x).$$

Символ $\forall$ читается *для всех* и называется *квантором общности*. А произошел этот символ от английского слова All (что значит *все*), в котором оставили только первую букву (математики очень экономны), а потом еще и перевернули ее (математики весьма изобретательны).

Далее для утверждения 2) принято такое обозначение:

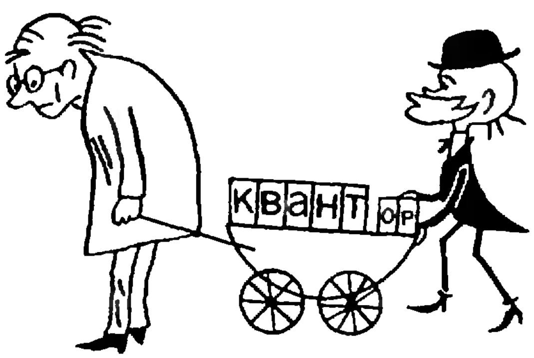
$$\exists x (x^2 = 2^x).$$

Символ $\exists$ читается *существует* и называется *квантором существования*. Происхождение этого символа похоже: с английским словом Exist (что значит *существовать*) обошлись так же, как и со словом All.

Теперь, в новой сокращенной записи, получим

$$\forall x (x^2 = 2^x) = Л \quad \text{(ложь)},$$
$$\exists x (x^2 = 2^x) = И \quad \text{(истина)}.$$

Обратимся к другому примеру, в котором исходным множеством будет множество всех взрослых людей — таким образом, в записанных ниже утверждениях разрешается вместо x «подставлять» любого взрослого человека. В данном случае не без смущения придется признать, что утверждение $\forall x$ (x — честный человек) ложно, но зато несколько обнадеживает истинность утверждения $\exists x$ (x — честный человек).



Вот, пожалуй, и все, что можно сказать на первый случай.

Происхождение термина *квантор* (латинское слово *quatum* означает *«сколько»* (связано с тем, что в традиционной логике утверждения классифицируются по «количественному содержанию» — по тому, к скольким объектам они относятся. Например, «Петров — честный человек» — *единичное* суждение. $\exists x$, x — честный человек» — *частное* суждение. «$\forall x$, x — честный человек» — *всеобщее* суждение.

Ф. Леонидов

РАЗМЫШЛЕНИЯ ПО ДОРОГЕ В ШКОЛУ

1. Пешком

Сумма номеров домов на квартале (отрезке улицы между двумя перекрестками) равна 33. Какие это номера?

Легко сообразить следующее:

1) Дома расположены на нечетной стороне, так как сумма четных чисел всегда четна.

2) Число домов на квартале нечетно, так как сумма четного числа нечетных чисел также четна.

3) Раз число домов нечетно, то есть средний дом. Пусть его номер l. Соседние дома имеют номера $l+2$ и $l-2$, соседние с ними $l+4$ и $l-4$ и т. д. Таким образом, сумма номеров равноудаленных от среднего равна $2l$ и, значит, двойная сумма номеров домов на квартале равна $2lm$, где m — число домов. Значит, сумма номеров домов на квартале равна lm и не является простым числом.

В нашем случае число 33 может быть разложено на два сомножителя двумя способами. 1) $33=3\times 11$, 2) $33=1\times 33$ Ясно, что $m<l$ поскольку отрицательные номера домам не присваиваются. Значит, либо $l=11$ и квартал состоит из домов под номерами 9, 11, 13, либо $l=33$ и весь квартал состоит из одного дома номер 33.

Решите эту же задачу, если сумма номеров домов равна 333.

А. Чульский

(Продолжение на стр. 59)

ИНФОРМАЦИЯ

ГОСУДАРСТВЕННЫЕ ПРЕМИИ 1969 ГОДА

Среди государственных премий, присужденных в 1969 году за научные исследования, две премии были присуждены за работы по физике и одна — за работу по математике.

Группа сотрудников Института атомной энергии имени И. В. Курчатова (Л. В. Грошев, А. М. Демидов, В. И. Пелехов), возглавляемая профессором Л. В. Грошевым, удостоена премии «за *цикл исследований спектров излучений, возникающих при захвате тепловых нейтронов ядрами*».

Эти исследования были начаты в 1953 году в связи с сооружением атомных реакторов. Атомный реактор — источник мощных потоков свободных нейтронов. Нейтроны охотно поглощаются атомными ядрами окружающих веществ. Поглотив нейтрон, ядро приобретает дополнительную энергию и становится возбужденным. Возвращаясь в нормальное состояние, ядро отдает энергию возбуждения в виде гамма-лучей (электромагнитное излучение с очень малой длиной волны). Так как атомное ядро является сложным образованием из протонов и нейтронов, оно может поглощать и отдавать энергию различными порциями (квантами гамма-излучения). Возбужденные ядра каждого элемента имеют свой набор гамма-лучей, который они способны излучать при переходе в нормальное состояние, или как говорят физики, свой спектр гамма-излучений. Эти спектры и изучались с исключительной точностью в лаборатории профессора Грошева. Полученные данные позволили выяснить, как нейтрон взаимодействует с ядерными частицами.

Сведения о спектрах гамма-излучений имеют такую же ценность для физики атомного ядра, как сведения об оптических спектрах для физики атома. В частности, они используются для проверки и уточнения моделей атомных ядер. Недаром составленный под руководством Л. В. Грошева атлас спектров гамма-лучей, возникающих при захвате нейтронов ядрами, является настольной книгой каждого специалиста в области ядерной физики.

Работы Л. В. Грошева и его сотрудников имеют много ценных практических применений. Точные данные о спектрах гамма-лучей разных элементов необходимы для расчета энергии, освобождаемой внутри атомного реактора, а также для проектирования его защитных оболочек. Измерение спектров гамма-излучений позволяет обнаруживать ничтожные примеси различных элементов, следить за выгоранием топлива в атомных реакторах, контролировать чистоту разделения радиоактивных веществ. Эти же методы существенно облегчают поиски многих полезных ископаемых.

Вторая Государственная премия по физике присуждена другой группе сотрудников Института атомной энергии имени И. В. Курчатова (Б. Н. Самойлов, В. В. Скляревский, В. Д. Горобченко, Е. П. Степанов) «*за открытие и исследование эффекта возникновения сильных магнитных полей сверхтонкого взаимодействия на ядрах немагнитных элементов в ферромагнетике и разработку нового метода поляризации атомных ядер*».

Эти ученые обнаружили в 1958 году удивительный эффект на радиоактивных ядрах золота.

Атомные ядра различных элементов обладают магнитными свойствами и имеют свои магнитные моменты. Они являются как бы маленькими магнитиками. Если ядро оказывается радиоактивным, оно испускает гамма-лучи в направлении, определенным образом согласованном с направлением своего магнитного момента.

В обычных условиях магнитные моменты атомных ядер в куске радиоактивного вещества ориентированы совершенно случайным образом. Поэтому интенсивность гамма-излучения, испускаемого таким куском вещества (например, радиоактивного золота), будет одинакова по всем направлениям. Как говорят физики, такое излучение изотропно.

Если бы удалось каким-то образом ориентировать магнитные моменты ядер в одном направлении, их гамма-излучение оказалось бы неизотропным. Но величина магнитных моментов атомных ядер так мала, что даже сильные магниты обычно не в состоянии оказать на них упорядочивающее влияние.

Нарушение изотропии гамма-излучения было установлено ранее только у ферромагнитных элементов. Оно связано с ориентацией магнитных моментов атомных ядер в сильных магнитных полях, в условиях, когда тепловое движение существенно ослаблено под влиянием сверхнизкой температуры и не расстраивает магнитной ориентации. (Такие ядра, магнитные моменты которых ориентированы в заданном направлении, называются поляризованными.) Чем сильнее упорядочены направления магнитных моментов радиоактивных атомных ядер, то есть чем выше степень их поляризации, тем отчетливее проявляется различие в интенсивностях гамма-лучей, испускаемых такими ядрами по разным направлениям. Но золото не принадлежит к ферромагнитным материалам, и магнитное поле даже очень сильных магнитов не может вызвать заметной ориентации его атомных ядер.

Однако, Б. Н. Самойлов и В. В. Скляревский показали, что если радиоактивное золото ввести в состав ферромагнитного вещества, например железа, охладить образовавшийся сплав до сверхнизкой температуры (ниже 0,3° К) и поместить его в сильное магнитное поле, то изотропия гамма-излучения исчезает. Ядра золота «охотнее» испускают гамма-лучи в некоторых определенных направлениях. В дальнейшем выяснилось, что атомы любого элемента, попав в ферромагнитный материал, подвергаются влиянию поляризованных атомов ферромагнетика. На них действуют магнитные поля силой до миллиона эрстед, вызывающие упорядочение ориентации любых атомов. Благодаря этому появилась возможность осуществлять с ядрами немагнитных элементов исследования целого ряда физических эффектов (так называемых сверхтонких расщеплений), которые раньше производились только на упорядоченно ориентированных ядрах магнитных элементов.

Это открытие позволяет поляризовать ядра многих атомов и получать уникальную информацию о самих атомных ядрах, электронных оболочках атомов и свойствах твердых тел. Пользуясь им, уже удалось определить многие значения магнитных моментов возбужденных атомных ядер.

Государственная премия присуждена также двум известным ленинградским математикам О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой *«за цикл работ по краевым задачам для линейных и квазилинейных параболических уравнений', опубликованных в 1962—1967 годах»*.

Параболические уравнения являются одним из типов уравнений математической физики, исследующих важнейшие задачи естествознания и техники. Они описывают большую группу физических явлений, связанных с распространением тепла, диффузией различных веществ, изменением их концентраций и другими процессами, при которых происходит постепенно выравнивание значений физических величин (температуры, концентрации и т. д.).

В работах О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой рассмотрены основные проблемы решения различных уравнений параболического типа и получены важные результаты, вносящие существенный вклад в общую теорию дифференциальных уравнений.

В. А. Лешковцев

РАЗМЫШЛЕНИЯ ПО ДОРОГЕ В ШКОЛУ

2. В автобусе

В автобус, идущий без кондуктора, вошло 15 незнакомых между собой человек. Ни у кого из них нет медных денег, а есть только монеты достоинством в 10, 15 и 20 копеек. (Билет стоит 5 копеек. В кассу можно бросить любую монету и оторвать соответствующее количество билетов.) Тем не менее вошедшие пассажиры смогли расплатиться за проезд, взяв сдачу друг у друга. Подумайте, как это могло быть?

Тем, кто решил эту задачу, предлагаем решить три более трудные:

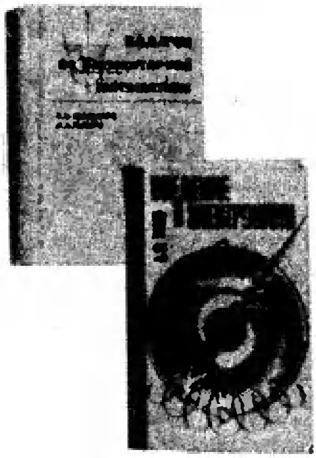
1. Докажите, что у этих пассажиров было не меньше 20 серебряных монет (иначе они не смогли бы расплатиться!).

2. Докажите, что у них было не меньше восьми 15-копеечных монет.

3. Докажите, что у всех пассажиров вместе было не меньше 2 р. 50 к.

Конечно, придумать пример, когда N пассажиров расплачиваются только монетами достоинством в 10, 15, 20 копеек, можно для любого $N \geq 2$. Подумайте, каковы точные оценки для общего количества монет, общего количества 15-копеечных монет и общего количества денег в этом случае? *Н. В.*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ



КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧУ?

Что лучше — решить задачу самому или прочесть ее решение? Для любителя математики не может быть двух ответов на этот вопрос, — конечно же, интереснее и полезнее найти решение самостоятельно. Ну, а как быть, если над задачей долго бьешься, а решение упорно не получается? Вроде бы испробовано и то, и это, но нащупать ведущий к цели путь все не удается.

Однако советов — что делать, если задача «не решается», —задачники по математике обычно не дают. Приходится открывать готовое решение, помещенное в конце книги, и читать его. При этом невольно испытываешь чувство неудовлетворенности, досады на себя — ведь все понятно, даже просто, не хватало какого-то маленького толчка. Вот если бы кто подсказал, с чего начать, какое дополнительное построение сделать, — и можно было бы довести решение до конца самому! Еще хуже, если вместо решения в книге помещен только ответ: тогда так и остаешься наедине с коварной задачей без всякой помощи...

Многочисленные наблюдения (и, в частности, опыт приемных экзаменов в вузы) показывают, что многие учащиеся не представляют себе, как приступить к решению задачи, если она не является упражнением на «известный тип», а поставлена сколько-нибудь необычно, если ее формулировка отличается от принятых в учебниках канонов. Большие трудности представляют задачи, в которых центр тяжести лежит не в формальных выкладках, а в последовательных логических рассуждениях, требующих комплексного использования разных разделов школьного курса.

Такие задачи в достаточном количестве юный читатель найдет в новом задачнике Е. Б. Ваховского и А. А. Рывкина по элементарной математике*). Всего здесь 477 задач. Почти каждая из них требует индивидуального подхода и своей идеи, т. е. представляет возможность провести маленькое самостоятельное исследование, а не просто применить какой-нибудь стандартный алгоритм решения.

Но интересно в книге Е. Б. Ваховского и А. А. Рывкина то, что авторы не просто подобрали разнообразные задачи и снабдили их решениями. К традиционной формуле «условие задачи — решение» добавляется промежуточное звено — «указание», ставящее своей целью дать необходимый «добавочный импульс» тем читателям, которые испытывают трудности при решении той или иной задачи.

Авторы как бы ставят себя на место решающего задачу, пытаются увидеть и понять источник его возможных затруднений, направляют его усилия в наиболее естественное русло, расчленяя решение на несколько этапов (ко многим задачам дано два указания, а к некоторым — даже три!), каждый из которых по силам выполнить учащемуся самому. Умелая и естественная помощь читателю, оставляющая ему разумную долю работы и потому максимально стимулирующая его самостоятельность, позволит юным любителям математики развить свое «математическое чутье», накопить тот опыт, который в дальнейшем поможет находить подходы к новым задачам.

Несомненно, что новый задачник как по своему содержанию, так и благодаря «полупрограммированной» системе подачи материала будет весьма полезен учащимся, особенно тем из них, кто проживает в сельской местности, в поселках и небольших городах, где нет физико-математических школ.

Книга Е. Б. Ваховского и А. А. Рывкина не лишена

---

*) Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин. Задачи по элементарной математике повышенной трудности, «Наука», М., 1969, 496 стр.

и отдельных недостатков. Не все указания можно признать удачными; некоторые из них представляют собой не совет, как искать решение, а сжатый план всего решения, и если план понятен, то остается провести лишь очевидные вычисления. Во многих случаях более уместно было бы задать читателю наводящий вопрос, а не рекомендовать сразу «рассмотреть то-то» или «поступать так-то».

В предисловии авторы пишут, что теоретические введения, которые предпосланы главам задачника, «нужно либо прочесть от начала до конца, либо не читать вовсе». К сожалению, во многих случаях юному читателю лучше рекомендовать второе. Введения же к некоторым главам (например, 7, 9, 23) совсем неудачны, ибо там сообщаются отрывочные сведения, часто дискуссионные и не соответствующие материалу стабильных учебников.

Можно отметить и ряд других дефектов. Решения к некоторым задачам приведены не самые лучшие. Например, задачу 6.10 проще решать «в лоб», следуя правилу умножения многозначного числа на однозначное; решение задачи 13.13 сильно сокращается, если проанализировать ее условие и заметить, что для всех допустимых x должно выполняться неравенство $\cos x>0$. Встречаются в книге неточности и опечатки. Так, ответ к задаче 18.13 должен быть такой: $120+90\sqrt{2}$ *км*; в приводимом решении задачи 2.9 существенно, что точки A и C, вокруг которых производится поворот, — вершины *острых* углов треугольника (очень рекомендуем читателю разобраться, где в решении это неявно использовано!), условие задачи 12.7 неточно сформулировано — надо дополнительно предположить, что $aB+bA\neq 0$.

Впрочем, едва ли имеет смысл приводить здесь полный перечень отдельных недостатков. Молодой читатель, будем надеяться, понимает, что создание книги — дело довольно сложное, и не всегда удается, несмотря на усилия авторов, все сделать идеально уже в первом издании.

Подавляющее большинство включенных в книгу задач взято авторами из вариантов письменных работ, предлагавшихся в разные годы на вступительных экзаменах по математике в Московском университете, а также в ряде других вузов Москвы. Очень хорошо, что эти задачи, снабженные указаниями и решениями, становятся доступными широким массам любителей математики, входят в школьную практику. Но при этом было бы уместно точно указывать источник заимствования, поскольку эти задачи являются плодом коллективного творчества экзаменационных комиссий. Каждый, кто хоть раз занимался составлением задач, знает, скольких трудов и какого времени требует появление новой оригинальной задачи. Кстати, эти ссылки были бы полезны и читателю — он смог бы по ним составить представление об уровне требований, предъявляемых к поступающим в различные вузы (или на разные факультеты университетов).

.. Известный американский математик Д. Пойа в своей книге «Как решать задачу», посвященной общей методике решения математических задач, писал: «Если он (преподаватель математики) будет пробуждать любознательность учащихся, предлагая им задачи, соразмерные с их знаниями, и своими наводящими вопросами будет помогать им решать эти задачи, то он сможет привить им вкус к самостоятельному мышлению и развить необходимые для этого способности». Приятно представить и порекомендовать читателю книгу именно такого характера, книгу, имеющую своей целью не только показать, как р е ш а т ь задачи, но и подсказать (там, где это необходимо), к а к их решать.

Н. Х. Розов

ВВЕДЕНИЕ В ЭЛЕКТРОНИКУ

Выпущенная издательством МГУ книга кандидата физико-математических наук А. М. Хазена «Введение в электронику» адресована школьникам, которые интересуются физикой, математикой и особенно электроникой и радиотехникой.

Книга рассчитана на массового читателя и вместе с тем написана на хорошем физическом уровне. Ясность изложения, оригинальность приведенных примеров сочетаются в ней с достаточной строгостью. Можно с уверенностью сказать, что для школьника, прочитавшего внимательно эту книгу, многие понятия электроники станут ясными.

Юным читателям будет интересно узнать, что принцип обычного вакуумного диода может использоваться для создания генератора электрического тока, работающего за счет внешнего источника тепла, чем похожи и чем отличаются линейный ускоритель электронов и лампа бегущей волны, что такое взрывомагнитный генератор и т. д.

В книге выделяются узловые вопросы для различных классов электронных устройств. Несмотря на большое количество описанных в книге конкретных приборов, она не перегружена примерами.

Книгу можно рекомендовать как пособие для школьников, выбравших технические дисциплины или физику своей будущей специальностью.

Д. Я. СВЕТ,

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Что такое график функции»

1. 1) $x \neq 0$; 2) $x \leqslant 1$; 3) $x \neq -1$ и $x \neq +1$.

3. $0 \leqslant x \leqslant 1$.

4. 6, из них 2 имеют обратную.

6. Все точки графика лежат на двух отрезках $D=0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и $D=1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, причем они расположены на каждом из этих отрезков «всюду плотно» (т. е. для любой точки M отрезков и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется точка графика на расстоянии, меньшем ε от точки M).

7. См. рис. 1.

8. а) $R^{90^\circ}_{(O_O)}$ (поворот относительно начала координат против часовой стрелки на угол 90°);

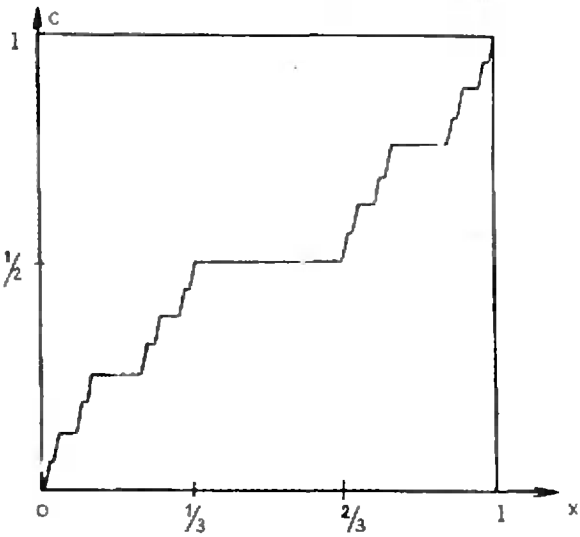


Рис. 1

б) преобразование симметрии относительно оси Ox;

е) параллельный перенос на расстояние $|a|$ по направлению биссектрисы угла Oxy, если $a > 0$, и в противоположном направлении, если $a < 0$.

10. Параллельный перенос на вектор с началом в точке O_2 и концом в точке $R^{\alpha}_{O_1}(O_2)$ (или, что то же самое, на вектор с началом $R^{-\alpha}_{O_2}(O_1)$ и концом O_1).

11. Отразите точку B симметрично относительно биссектрисы.

13. Докажите, что если в треугольнике ABC BM — медиана и $AB > BC$, то $\widehat{ABM} < \widehat{MBC}$, выведите из условия $AH = BM$ равенство $\angle MBC = 30°$.

К статье «Как был взвешен атом»

1. 5,55 *км*.

2.

$$P_2 = P_1\left(\frac{P_1}{P_0}\right),$$

$$P_3 = P_3\left(\frac{P_1}{P_0}\right) P_1\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^2,$$

$$P_n = P_1\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{n-1}.$$

3. 11,1 *км*; 16,65 *км*. Удобно воспользоваться результатом задачи 1. Давление пропорционально плотности воздуха.

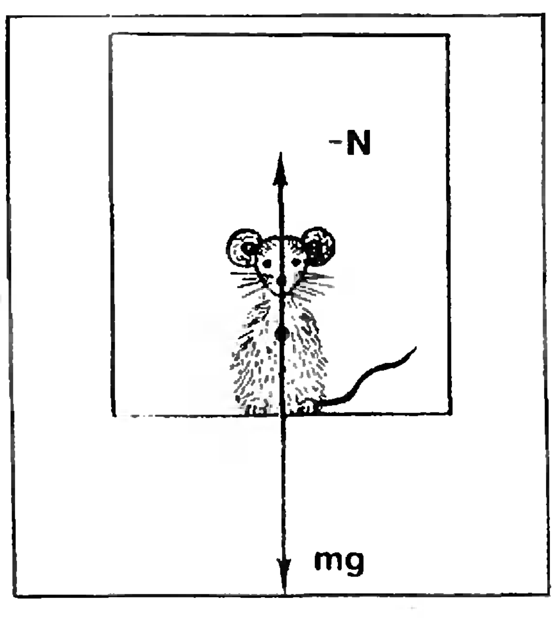
К «Логической задаче»

Человек не может одновременно и спать и есть. Поэтому срок в семь суток после сна и после еды наступает в разное время. Человек должен сделать то, что неделю назад он делал раньше: спал или ел.

Ответы на вопросы по физике

1. Из-за большой теплоемкости вода прогревается медленнее, чем воздух. Поэтому она холоднее воздуха. Когда же вы выходите из воды, то капельки воды, оставшиеся на теле, испаряются. Поглощая при этом много тепла, они отбирают его не только у окружающего воздуха, но и у тела. Тело охлаждается, и воздух начинает казаться холоднее воды.

2. Большинство продуктов содержит воду. Испаряясь, она вымерзает на самой холодной части холодильника — испарителе. Поэтому испаритель покрывается толстой снеговой шубой, обладающей низкой теплопроводностью. Это приводит к уменьшению теплоотвода из камеры, и температура в холодильнике понижается недостаточно.



3. Во все время движения коробки после броска. Действительно, допустим, что мышь давит на коробку с силой N. Тогда на мышь со стороны коробки действует сила $-N$ (реакция коробки). Так как коробка, а вместе с ней и мышь, движется с ускорением, свободного падения g, то уравнение движения (второй закон Ньютона) запишется для мыши так: $mg-N=mg$. Из этого уравнения справедливого, естественно, для всего времени движения коробки, найдем, что $N=0$, то есть мышь находится в состоянии невесомости.

4. Одновременно, так как количество тепла, которое нужно сообщить воде в обоих случаях, одно и то же.

4а. В той, где вначале воды было больше.

К статье «Кривые драконы»

1. Меньше: 2^{30} *см* $= 1024^3$ *см* $= (1{,}024)^3 \times \times 10^9$ *см* $\approx 1{,}07 \cdot 10^9$ *см* $=$ 10 700 *км*, а до Луны примерно 384 000 *км*.

2. Ломаная заменится зеркально симметричной. В записывающем ее слове каждая буква изменится на противоположную: R на L, а L на R.

3. б) 2^{n-2} (при $n \geq 2$). Ср. с задачей 5, г, д)

4. Черепаха прочтет слово, которое получается из исходного слова, если записать его буквы в обратном порядке, а затем всюду поменять L на R, а R на L. Это утверждение верно для любой ломаной. Для ломаных дракона новое слово из старого получается совсем просто — надо только заменить в исходном слове среднюю букву на противоположную (см. задачу 5).

5. Используйте теоремы 1, 2 и задачу 3.

6. Вообще говоря, другие (например, для ломаной $RRLLRLLLRRLRRLL$).

7. Используйте теорему 2.

9. Можно провести индукцию по n (рангу ломаной), доказав с помощью задачи 8, что достраиваемые согласно теореме 2 треугольники не могут расположиться так, как показано на рис. 1.

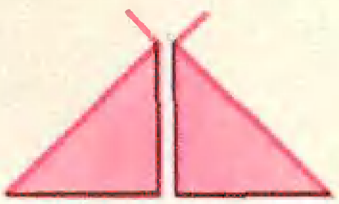


Рис. 1

10. То, что две *соседние* ломаные (получающиеся друг из друга поворотом на 90°) не имеют общего отрезка, вытекает из теоремы 1 и задачи 9. Чтобы строго доказать, что две симметричные друг другу относительно точки O ломаные не могут иметь общего отрезка, можно использовать теорему Жордана: «замкнутая несамопересекающаяся линия делит плоскость на две такие области (внутреннюю и внешнюю), что любая линия, один конец которой лежит во внешней области, а другой — во внутренней пересекает данную линию *)»; при этом, поскольку наши ломаные дракона приходят в некоторые вершины по два раза, удобнее перейти к кривым дракона (рис. 2).

11. а) Проверьте, пользуясь теоремой 1 (индукция по n).

б) Ср. с задачей 7.

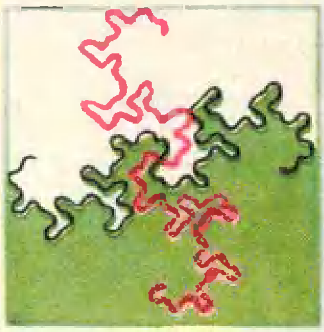


Рис. 2

К статье «О письменном экзамене» на мехмате МГУ

Вариант 2.

1) 30 мин.;

2) $(1+\sqrt{17})$ *м*;

3) $0,\ \frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2}$;

4) $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

*) О теореме Жордана см., например, в книге: Р. Курант и Г. Роббинс, «Что такое математика», изд-во «Просвещение», 1967, стр. 275.

Исследования по дороге в школу

1. Пешком

Три решения: 1) девять домов от № 29 до № 45; 2) три дома от № 109 до № 113; 3) один дом № 333.

2. В автобусе

Легко сообразить, как могут рассчитаться двое, трое или четверо пассажиров (некоторые варианты изображены на рис. 1) и, пользуясь этим, построить много разных примеров, как могли рассчитаться 15 пассажиров.

1. Заметьте, что при каждом способе расчета не менее 5 монет опущено в кассу и не менее 15 осталось у пассажиров. Нетрудно построить пример, когда общее число монет у всех пассажиров — 20.

во-вторых, не меньше $15k+20k$ копеек (рис. 2). Постройте пример, когда общая сумма — 2 р. 50 к!

В общем случае — для N пассажиров — ответы такие: 1) минимально возможное количество монет у всех пассажиров (при котором они еще могут рассчитаться) $\left[\frac{5N+3}{4}\right]$; 2) минимально возможное общее количество 15-копеечных монет $\left[\frac{N+1}{2}\right]$; минимально возможная общая сумма денег $15N+5\left[\frac{N+2}{3}\right]$ коп.; здесь через $[x]$ мы обозначаем целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x. (Без этого обозначения ответы можно сформулировать так: 1) N монет и еще по

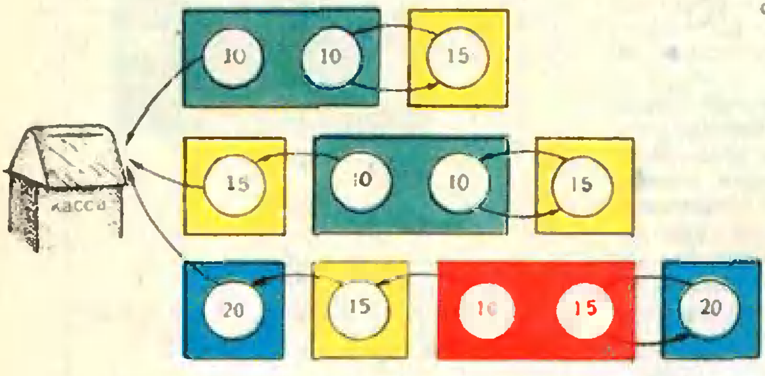


Рис. 1

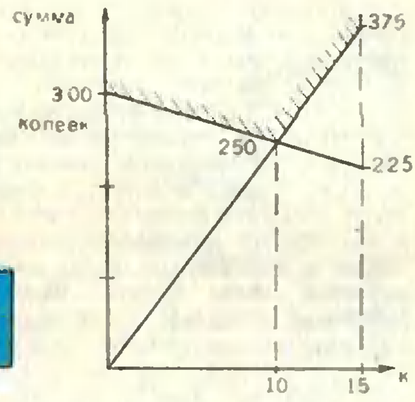
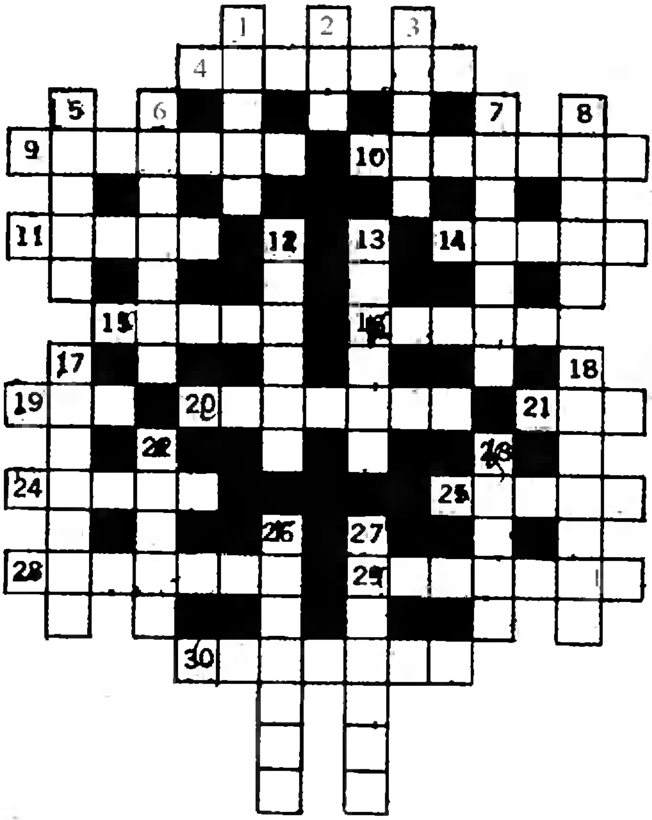


Рис. 2

3. Докажите, что если среди 15 человек k таких, у которых есть только одна монета в 15 коп., то общее количество денег, во-первых, не меньше $15k+20(15-k)$ копеек и,

одной монете на каждую полную или неполную четверку пассажиров; 3) 15 монет у каждого и еще по 5 коп. на каждую полную или неполную тройку пассажиров.)

Поправка.
В № 1 на стр. 7 подпись под рисунком читать так:
ν $0{,}75\cdot10^{15}$ $0{,}6\cdot10^{15}$ $0{,}5\cdot10^{15}$ $0{,}43\cdot10^{15}$
ω $4{,}71\cdot10^{15}$ $3{,}77\cdot10^{15}$ $3{,}14\cdot10^{15}$ $2{,}7\cdot10^{15}$
Значение ν надо также вставить аргументом в спектральную функцию.



КРОССВОРД

По горизонтали:

4. Прямая, имеющая две общие точки с окружностью.
9. Систематичность в расположении.
10. Совпадение фигур по форме.
11. Одна из важных точек, связанных с эллипсом, гиперболой или параболой.
14. Название функции.
15. Число, характеризующее место члена в последовательности.
16. Геометрическое тело.
19. Число.
20. Элемент многоугольника.
21. Латинская буква, часто употребляемая в алгебре.
24. Составитель первых таблиц логарифмов.
25. Геометрическое понятие.
28. Символическая запись утверждения.
29. Математическое предложение.
30. Часть круга.

По вертикали:

1. Общий способ.
2. Часть прямой.
3. Непреложное правило.
5. Одночлен.
6. Выдающийся русский математик, основоположник теории устойчивости.
7. Название функции.
8. Математический знак.
12. Характеристика тригонометрических функций.
13. Часть круга.
17. Часть прямой.
18. Математическое предложение.
22. Вспомогательная теорема.
23. Знак, входящий в обозначение числа.
26. Название функции.
27. Высота сегмента.

ОТВЕТЫ НА КРОССВОРД, ОПУБЛИКОВАННЫЙ В № 1

По горизонтали:

a) 121, *c*) 576, *d*) 361, *f*) 961, *h*) 491, *j*) 163, *l*) 58081, *m*) 181, *o*) 383, *q*) 211, *s*) 144, *t*) 251, *u*) 167.

По вертикали:

a) 169, *b*) 131, *c*) 529, *e*) 196, *g*) 63001, *h*) 441, *i*) 151, *j*) 113, *k*) 313, *n*) 841, *p*) 881, *q*) 241, *r*) 127.

ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

квант 2